

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL  
Fachgruppe Mathematik und Informatik

Übungen zur Vorlesung Komplexe Analysis I WiSe 2018/2019  
Übungsblatt 12

Dr. Tobias Harz

Abgabe: 25.01.2019, 14 Uhr

---

**Aufgabe 41 (12 Punkte)** Sei  $U \subset \mathbb{C}^n$  offen. Seien  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\chi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jeweils  $\mathcal{C}^2$ -glatte Funktionen. Zeigen Sie, dass

$$\text{Lev}(\chi \circ \varphi)(a, X) = \chi'(\varphi(a)) \text{Lev}(\varphi)(a, X) + \chi''(\varphi(a)) |(\partial\varphi)_a(X)|^2.$$

**Aufgabe 42 (24 Punkte)** Sei  $U \subset \mathbb{C}^n$  offen, sei  $a \in U$  und sei  $\varphi \in \mathcal{C}^2(U)$ . Für  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$  und  $X = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{C}^n$  schreiben wir

$$z_j = t_{2j-1} + it_{2j} \quad \text{und} \quad X_j = V_{2j-1} + iV_{2j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Ferner definieren wir

$$\text{Hess}_{\mathbb{R}}(\varphi)(a, X) := \sum_{\nu, \mu=1}^{2n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_\nu \partial t_\mu}(a) V_\nu V_\mu \quad \text{und} \quad \text{Hess}_{\mathbb{C}}(\varphi)(a, X) := \sum_{j, k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial z_k}(a) X_j X_k.$$

Zeigen Sie, dass

$$\text{Hess}_{\mathbb{R}}(\varphi)(a, X) = 2 \text{Re}[\text{Hess}_{\mathbb{C}}(\varphi)(a, X)] + 2 \text{Lev}(\varphi)(a, X),$$

und folgern Sie, dass

$$\varphi(a + X) = \varphi(a) + 2 \text{Re}[(\partial\varphi)_a(X) + \frac{1}{2} \text{Hess}_{\mathbb{C}}(\varphi)(a, X)] + \text{Lev}(\varphi)(a, X) + o(|X|^2).$$

**Aufgabe 43 (12 Punkte)** Sei  $U := \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ . Sei  $\{f_j\}_{j=1}^\infty$  eine Folge von Abbildungen  $f_j: \overline{\mathbb{D}} \rightarrow U$ , die stetig auf  $\overline{\mathbb{D}}$  und holomorph auf  $\mathbb{D}$  sind, und die gleichmäßig gegen eine Funktion  $f_0: \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}^2$  konvergiert. Angenommen  $f_0(b\mathbb{D}) \subset U$ . Zeigen Sie, dass dann auch  $f_0(\overline{\mathbb{D}}) \subset U$ .

*Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 15.*