BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Fachgruppe Mathematik und Informatik

Übungen zur Vorlesung Komplexe Analysis I WiSe 2018/2019

Übungsblatt 11

Dr. Tobias Harz — Abgabe: 18.01.2019, 14 Uhr

Aufgabe 38 (18 Punkte) Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(1) Sind $u_1, u_2 \in \mathcal{SH}(U)$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, \infty)$, so ist $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in \mathcal{SH}(U)$.

(2) Ist $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{SH}(U)$ eine monoton fallende Folge, so ist $u := \lim_{j\to\infty} u_j \in \mathcal{SH}(U)$.

(3) Ist $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{SH}(U)$ lokal gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion $u \colon U \to \mathbb{R}$, so ist $u \in \mathcal{SH}(U)$.

(4) Sei $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{SH}(U)$, so dass $u := \sup_{\alpha\in A} u_\alpha$ lokal nach oben beschränkt ist. Dann ist $u^*(z) := \limsup_{z'\to z} u(z')$ subharmonisch auf U.

Aufgabe 39 (18 Punkte) Sei (X, d) ein parakompakter und lokal kompakter metrischer Raum.

(1) Sei $f \in \mathcal{C}^+(X)$ nach oben beschränkt. Zeigen Sie, dass

$$f_n(x) := \sup\{f(y) - nd(x, y) : y \in X\}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine stetige Funktion definiert, und dass $f_n \searrow f$ für $n \to \infty$.

(2) Sei $f \in \mathcal{C}^+(X)$ beliebig. Zeigen Sie, dass eine Folge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}(X)$ existiert mit $f_n \searrow f$ für $n \to \infty$.

Hinweis: Sie dürfen das folgende Resultat verwenden: Ist X ein parakompakter und lokal kompakter metrischer Raum, so gibt es eine lokal endliche Überdeckung $\{U_j\}_{j\in J}$ von X durch offene Teilmengen $U_j \subset\subset X$, und stetige Funktionen $\chi_j \colon X \to [0, 1]$ mit $\operatorname{supp} \chi_j = \overline{U_j}$, so dass $\sum_{j=1}^{\infty} \chi_j \equiv 1$.

Verwenden Sie Teil (1) für die Funktionen $f_j := f|_{U_j}$, um eine Folge $\{f_{j,n}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}(U_j)$ mit $f_{j,n} \searrow f_j$ für $n \to \infty$ zu erhalten, und machen Sie den Ansatz $f_n := \sum_{j=1}^{\infty} \chi_j f_{j,n_j}$.

Aufgabe 40 (12 Punkte) **(a)** Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und sei $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass $u := \log|f|$ harmonisch auf $\Omega \setminus \{f = 0\}$ ist.

(b) Sei $\varphi \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$, $\varphi(z) := |z|^2$. Berechnen Sie $\operatorname{Lev}(\varphi)(p, X)$ für beliebiges $p, X \in \mathbb{C}^n$.