

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
Fachgruppe Mathematik und Informatik

Übungen zur Vorlesung Komplexe Analysis I WiSe 2018/2019
Übungsblatt 10

Dr. Tobias Harz

Abgabe: 11.01.2019, 14 Uhr

Aufgabe 34 (12 Punkte) Sei X ein topologischer Raum und sei $f: X \rightarrow [-\infty, \infty)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (1) Für jedes $x \in X$ ist f oberhalb stetig in x .
- (2) Für jedes $x \in X$ ist $\limsup_{x' \rightarrow x} f(x') \leq f(x)$.
- (3) Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist $\{f < c\}$ offen.

Aufgabe 35 (12 Punkte) Sei X ein kompakter topologischer Raum und sei $f: X \rightarrow [-\infty, \infty)$ oberhalb stetig. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in X$ existiert mit $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in X$.

Aufgabe 36 (12 Punkte) Sei X ein kompakter topologischer Raum. Sei $f: X \rightarrow [-\infty, \infty)$ oberhalb stetig und sei $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ eine Folge stetiger Funktionen, die monoton fallend gegen f konvergiert. Zeigen Sie, dass $\lim_{j \rightarrow \infty} \max_X f_j = \max_X f$.

Aufgabe 37 (12 Punkte) Sei X ein topologischer Raum, sei $Y \subset X$ und sei $f: Y \rightarrow [-\infty, \infty)$ lokal nach oben beschränkt. Dann heißt

$$f^*: \bar{Y} \rightarrow [-\infty, \infty), \quad f^*(y) := \limsup_{y' \rightarrow y} f(y')$$

die *oberhalb stetige Regularisierung* von f . Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (1) $f^* \in \mathcal{C}^+(\bar{Y})$.
- (2) Ist $f \in \mathcal{C}^+(Y)$, so gilt $f = f^*$ auf Y .
- (3) Ist $g \in \mathcal{C}^+(Y)$ mit $f \leq g$, so gilt $f^* \leq g$ auf Y .