BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
Fachgruppe Mathematik und Informatik

Übungen zur Vorlesung Komplexe Analysis I WiSe 2018/2019
Übungsblatt 8

Dr. Tobias Harz — Abgabe: 14.12.2018, 14 Uhr

Aufgabe 27 (12 Punkte) Seien $U, V \subset \mathbb{C}^n$ offen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(1) Falls $K, L \subset U$ mit $K \subset L$, so gilt $\hat{K}_U \subset \hat{L}_U$.

(2) Falls $K \subset V \subset U$, so gilt $\hat{K}_V \subset \hat{K}_U$.

(3) Falls $K \subset U$, so gilt $\widehat{(\hat{K}_U)}_U = \hat{K}_U$.

(4) Falls $K \subset\subset U$, so ist $\hat{K}_U$ beschränkt und abgeschlossen in U.

Aufgabe 28 (18 Punkte) Sei $K := \{z \in \mathbb{C}^2 : z_1 = 0, |z_2| = 1\}$.

(1) Berechnen Sie $\hat{K}_U$ für $U := \mathbb{C}^2$.

(2) Berechnen Sie $\hat{K}_U$ für $U := \mathbb{C}^2 \setminus [\mathbb{C} \times \{0\}]$.

(3) Berechnen Sie $\hat{K}_U$ für $U := \mathbb{C}^2 \setminus [(\mathbb{C} \setminus D) \times \{0\}]$, wobei $D \subset \mathbb{C}$ offen mit $D \neq \emptyset$.

Aufgabe 29 (18 Punkte) Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen. Für jedes $K \subset\subset \mathbb{R}^N$ definiere $\hat{K}$ durch

$$\hat{K} := \{x \in U : L(x) \leq \sup_K L \text{ für alle affin linearen Funktionen } L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\}.$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) Für alle $x, y \in U$ ist $[x, y] \subset U$.

(2) Für alle $K \subset\subset U$ ist $\hat{K} \subset\subset U$.

Hierbei bezeichnet für $x, y \in \mathbb{R}^N$ die Menge $[x, y] := \{(1-t)x + ty \in \mathbb{R}^N : t \in [0, 1]\}$ die Verbindungsstrecke von x nach y.

Hinweis: OBdA ist $0 \in U$. Für die Implikation (1) $\Rightarrow$ (2) zeigen Sie zunächst:

(i) Für jede abgeschlossene konvexe Menge $M \subset \mathbb{R}^N$ gilt $\hat{M} = M$. (Verwenden Sie hierfür den folgenden Trennungssatz: Ist $M \subset \mathbb{R}^N$ abgeschlossen und konvex, und ist $x \in \mathbb{R}^n \setminus M$, so existiert ein lineares Funktional $L\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ mit $L(x) > sup_M L$.)

(ii) Für jedes $\lambda > 0$ ist die Menge $M := \overline{\lambda U}$ konvex. (Sie dürfen verwenden, dass der Abschluss einer konvexen Menge wieder konvex ist.)

Für die Implikation (2) $\Rightarrow$ (1) betrachten Sie $K = \{x, y\}$.