BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
**Fachgruppe Mathematik und Informatik**

Übungen zur Vorlesung Komplexe Analysis I WiSe 2018/2019
Übungsblatt 7

Dr. Tobias Harz | Abgabe: 07.12.2018, 14 Uhr

---

**Aufgabe 23 (12 Punkte)** Seien $(X_j, \pi_j, p_j)$ Gebiete über $\mathbb{C}^n$ mit ausgezeichnetem Punkt, $j = 1, 2$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$X_1 \simeq X_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c}\text{Es existiert ein Homöomorphismus } \varphi\colon X_1 \to X_2 \text{ mit} \\ \pi_2 \circ \varphi = \pi_1 \text{ und } \varphi(p_1) = p_2.\end{array}$$

Für die übrigen Aufgaben betrachten wir die folgende Situation: Seien $X_j = (\Omega_j, \pi_j, p_j)$ Gebiete über $\mathbb{C}^n$ mit ausgezeichnetem Punkt, $j \in J$. Auf der disjunkten Vereinigung $\coprod_{j \in J} \Omega_j$ betrachte folgende Äquivalenzrelation:

$$q_j \sim q_k \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{array}{c}\text{Es gibt stetige Wege } \alpha_j\colon [0,1] \to \Omega_j \text{ von } p_j \text{ nach } q_j \text{ und} \\ \alpha_k\colon [0,1] \to \Omega_k \text{ von } p_k \text{ nach } q_k \text{ mit } \pi_j \circ \alpha_j = \pi_k \circ \alpha_k.\end{array}$$

Sei ferner $\pi\colon \Omega \to \mathbb{C}^n$ definiert durch $\pi([q_j]) := \pi_j(q_j)$, und $p := [p_j]$, wobei $[\,\cdot\,]$ die Äquivalenzklassenbildung bezeichnet.

**Aufgabe 24 (12 Punkte)** Seien $x_j \in \Omega_j$ und $x_k \in \Omega_k$ mit $\pi_j(x_j) = \pi_k(x_k) =: z$. Seien $U_j \subset \Omega_j$ eine offene Umgebung von $x_j$, $U_k \subset \Omega_k$ eine offene Umgebung von $x_k$ und $V \subset \mathbb{C}^n$ eine zusammenhängende offene Umgebung von $z$, so dass $\pi_j\colon U_j \to V$ und $\pi_k\colon U_k \to V$ Homöomorphismen sind. Dann ist offenbar $\Phi := (\pi_k|_{U_k})^{-1} \circ \pi_j\colon U_j \to U_k$ ein Homöomorphismus mit $\Phi(x_j) = x_k$. Zeigen Sie:

$$\Phi(x_j) \sim x_j \quad \Rightarrow \quad \Phi(y_j) \sim y_j \text{ für alle } y_j \in U_j.$$

**Aufgabe 25 (12 Punkte)** Für jedes $j \in J$ sei $\varphi_j\colon \Omega_j \hookrightarrow \coprod_{\nu \in J} \Omega_\nu \to \Omega$ die natürliche Projektionsabbildung in den Quotienten, d.h. $\varphi_j(x_j) := [x_j]$. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{B} := \{\varphi_j(U_j) \subset \Omega : U_j \subset \Omega_j \text{ offen}, j \in J\}$$

Basis einer Topologie auf $\Omega$ ist.

*Hinweis: Wegen $\varphi_j(U_j) \cap \varphi_k(U_k) = \varphi_j(U_j \cap \varphi_j^{-1}(\varphi_k(U_k)))$, genügt es zu zeigen, dass $\varphi_j^{-1}(\varphi_k(U_k))$ offen in $\Omega_j$ ist.*

Bitte Wenden

**Aufgabe 26 (12 Punkte)** Angenommen $\Omega$ ist mit der durch die Basis $\mathcal{B}$ erzeugten Topologie versehen, siehe Aufgabe 25. Zeigen Sie, dass dann gilt:

(i) $\Omega$ ist zusammenhängend.

(ii) $\Omega$ ist hausdorffsch.

(iii) $\pi$ ist ein lokaler Homöomorphismus.