BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
Fachgruppe Mathematik und Informatik

Übungen zur Vorlesung Komplexe Analysis I WiSe 2018/2019
Übungsblatt 5

Dr. Tobias Harz Abgabe: 23.11.2018, 14 Uhr

Aufgabe 15 (12 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und sei $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ lokal gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$. Angenommen alle Funktionen f_j, $j \in \mathbb{N}$, sind nullstellenfrei. Zeigen Sie, dass dann entweder auch f nullstellenfrei ist, oder $f \equiv 0$.
Hinweis: Sie dürfen den Satz von Hurwitz aus Dimension $n = 1$ benutzen.

Aufgabe 16 (12 Punkte) Sei $\{a_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \subset \mathbb{C}$ und sei $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha := \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha$ konvergiert absolut.

(ii) $\sum_{j=0}^{\infty} a_{\Phi(j)}$ konvergiert absolut für jede Bijektion $\Phi\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0^n$.

(iii) $\sum_{j=0}^{\infty} a_{\Phi(j)}$ konvergiert absolut für eine Bijektion $\Phi\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0^n$.

Aufgabe 17 (12 Punkte) Seien $\sum_{\alpha_1=0}^{\infty} a_{\alpha_1}^{(1)}, \dots, \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} a_{\alpha_n}^{(n)}$ absolut konvergent, $a_{\alpha_j}^{(j)} \in \mathbb{C}$, und sei $a_\alpha := a_{\alpha_1}^{(1)} \cdots a_{\alpha_n}^{(n)}$. Zeigen Sie, dass $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha$ absolut konvergiert und $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha = \prod_{j=1}^{n} \sum_{\alpha_j=0}^{\infty} a_{\alpha_j}^{(j)}$.

Aufgabe 18 (12 Punkte) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der folgenden Potenzreihe in $\mathbb{C}^2$,

$$f(z) := \sum_{j,k=1}^{\infty} z_1^j z_2^k.$$