BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Fachgruppe Mathematik und Informatik

Übungen zur Vorlesung Komplexe Analysis I WiSe 2018/2019

Übungsblatt 4

Dr. Tobias Harz — Abgabe: 16.11.2018, 14 Uhr

Aufgabe 13 (12 Punkte) Sei $D = D' \times D_n \subset\subset \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^n$ ein Polyzylinder und sei f eine Funktion, welche auf einer Umgebung von $\bar{D}$ definiert ist. Angenommen f ist holomorph in einer Umgebung von $D' \times bD_n$, und für jedes feste $z' \in D'$ ist $f_{z'} \colon D_n \to \mathbb{C}$, $f_{z'}(z_n) := f(z', z_n)$, holomorph. Zeigen Sie, dass f auf $D' \times D_n$ holomorph ist.

Aufgabe 14 (36 Punkte) Sei $D = D' \times D_n \subset\subset \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^n$ ein Polyzylinder, sei f holomorph in einer Umgebung von $\bar{D}$ und nehme an, dass für $A := \{f = 0\}$ gilt $A \cap [\bar{D}' \times bD_n] = \emptyset$.

(a) Zeigen Sie, dass ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für jedes $z' \in D'$ die Funktion $f_{z'} := f(z', z_n) \colon D_n \to \mathbb{C}$ genau k Nullstellen hat (mit Vielfachheiten gezählt).

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Rouché.

(b) Seien $a_1(z'), \ldots, a_k(z')$ die (nicht notwendig paarweise verschiedenen) Nullstellen von $f_{z'}$. Zeigen Sie, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$p_m(a_1, \ldots, a_k) := \sum_{j=1}^{k} a_j^m$$

holomorph aud D' ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für $U \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in U$ und $f, g \in \mathcal{O}(U)$ gilt

$$\mathrm{Res}_a[g\frac{f'}{f}] = g(a)\,\mathrm{ord}_a f,$$

wobei $\mathrm{ord}_a f$ die Ordnung von f in a bezeichnet. Benutzen Sie anschließend den Residuensatz, um das folgende Integral zu berechnen:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{bD_n} \zeta^m \frac{f'_{z'}(\zeta)}{f_{z'}(\zeta)} d\zeta.$$

(c) Es ist

$$\prod_{j=1}^{k}(z_n - a_j(z')) = z_n^k + c_1(z')z_n^{k-1} + \cdots + c_k(z') \quad \text{auf } D$$

mit wohldefiniereten Funktionen $c_j \colon D' \to \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, k$. Zeigen Sie, dass alle Funktionen c_j holomorph sind.

Hinweis: Sie dürfen die folgende Konsequenz aus den Newton-Identitäten aus der Algebra benutzen: Ist

$$\sigma_m(X_1, \dots, X_k) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq k} X_{j_1} \cdots X_{j_m}$$

das m-te elementarsymmetrische Polynom in k Variablen, und ist

$$p_m(X_1, \dots, X_k) = \sum_{j=1}^{k} X_j^m$$

die m-te Potenzsumme in k Variablen, so gibt es für jedes $m = 1, \dots, k$ ein Polynom $Q_m \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_k]$ mit

$$\sigma_m = Q_m(p_1, \dots, p_k).$$

(d) Zeigen Sie, dass eine nullstellenfreie Funktion $\phi \in \mathcal{O}(U)$ existiert, so dass

$$f(z) = (z_n^k + c_1(z')z_n^{k-1} + \dots + c_k(z'))\phi(z) \quad \text{auf } D.$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die auf $D \setminus A$ holomorphe Funktion

$$\tilde{\phi}(z) := f(z)(z_n^k + c_1(z')z_n^{k-1} + \dots + c_k(z'))^{-1},$$

Verwenden Sie den Riemannschen Hebbarkeitssatz in Dimension $n = 1$ und Aufgabe 9. (Die Verwendung des Riemannschen Hebbarkeitssatzes in Dimension $n > 1$ wäre natürlich auch möglich, aber dieser Satz wird erst in der kommenden Woche in der Vorlesung bewiesen.)