BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
Fachgruppe Mathematik und Informatik

Übungen zur Vorlesung Komplexe Analysis I WiSe 2018/2019
Übungsblatt 3

Dr. Tobias Harz — Abgabe: 09.11.2018, 14 Uhr

Aufgabe 9 (12 Punkte) Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen. Sei $f\colon \overline{\mathbb{D}} \to U$ holomorph auf $\mathbb{D}$ und stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$. Seien $g_1, \dots, g_N \in \mathcal{O}(U)$ und setze $P := \{z \in U : |g_1(z)|, \dots, |g_N(z)| < 1\}$. Zeigen Sie:

$$f(b\mathbb{D}) \subset\subset P \quad \Rightarrow \quad f(\overline{\mathbb{D}}) \subset\subset P.$$

Hinweis: Verwenden Sie das Maximumprinzip.

Aufgabe 10 (12 Punkte) Sei $f\colon \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}^2$ holomorph auf $\mathbb{D}$ und stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$. Seien $\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z = 0\}$, $L := \{0\} \times \mathbb{C}$ und $\pi_z\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $\pi_z(z,w) := z$. Zeigen Sie:

$$\pi_z(f(b\mathbb{D})) \subset \mathbb{C}_- \quad \Rightarrow \quad f(\overline{\mathbb{D}}) \cap L = \emptyset.$$

Hinweis: Verwenden Sie das Argumentprinzip.

Aufgabe 11 (12 Punkte) Seien $f_1, f_2\colon \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ holomorph auf $\mathbb{D}$ und stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$. Betrachten Sie die Graphen $\Gamma_j := \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : z \in \overline{\mathbb{D}} \text{ und } w = f_j(z)\}$, $j = 1,2$. Angenommen $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$; insbesondere ist $d := \min_{z \in b\mathbb{D}} |f_1(z) - f_2(z)| > 0$. Zeigen Sie:

$$(\Gamma_1 + \delta \boldsymbol{e_w}) \cap \Gamma_2 = \emptyset \qquad \forall\, \delta \in \mathbb{C} \text{ mit } |\delta| < d.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Rouché.

Aufgabe 12 (12 Punkte) Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen. Eine relativ abgeschlossene Menge $A \subset U$ heißt analytisch in U, falls für jeden Punkt $p \in A$ eine offene Umgebung $V \subset U$ von p existiert und holomorphe Funktionen $f_1, \dots, f_N \in \mathcal{O}(V)$, so dass

$$A \cap V = \{z \in V : f_1(z) = \cdots = f_N(z) = 0\}.$$

Zeigen Sie: Sind A, B analytisch in U so sind auch $A \cup B$ und $A \cap B$ analytisch in U.