WS 18/19 Prof. Shcherbina / Herrmann

13. Blatt zur Vorlesung Elemente der Komplexen Analysis
keine Abgabe. Besprechung: 31.01.2019 in der Übung

1. Aufgabe (0 Punkte)
Gegeben seien die folgenden holomorphen Abbildungen $f_j \colon U_j \to V_j$, sowie hermitische Metriken ds_j auf V_j. Berechnen Sie die Metriken $f_j^* ds_j = ds_j \circ f_j$ sowie die Krümmungen $K(ds_j, w)$, $K(f_j^* ds_j, z)$ in allen Punkten $w \in V_j$ bzw. $z \in U_j$, in denen $f^* ds_j$ regulär ist.

(a) $U_1 = V_1 = \mathbb{C}$, $f_1(z) = 1 + z + z^2$, $ds_1(z) = \exp(|z|^2)|dz|$.

(b) $U_2 = V_2 = \mathbb{D}$, $f_2(z) = z^2$, $ds_2(z) = (1 + (z + \overline{z})^2)|dz|$.

(c) $U_3 = \mathbb{H}$, $V_3 = \mathbb{D} \setminus \{0\}$, $f_3(z) = \exp(iz)$, $ds_3(z) = -\ln(|z|)|dz|$.

2. Aufgabe (0 Punkte)
Finden Sie jeweils eine reguläre, negativ gekrümmte Stützmetrik der folgenden Metriken im Punkt 0:

(a) $ds(z) = (1 + |z| + |z|^2)|dz|$,

(b) $ds(z) = (1 + |z + \overline{z}|)|dz|$,

(c) $ds(z) = \exp(|z|^2)|dz|$.

3. Aufgabe (0 Punkte)
Man betrachte das Gebiet $G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$ zusammen mit der hermiteschen Metrik $ds = (1+|z|+|z|^2)|dz|$. Zeigen Sie, dass (G, ds) ein stark negativ gekrümmtes Gebiet ist.

4. Aufgabe (0 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $f_n(z) = \frac{z}{n}$, kompakt gegen den Rand von $\mathbb{H}$ konvergiert.

(b) Es seien $f, g \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n = f + \frac{1}{n} g$, auf $\mathbb{C}$ kompakt gegen f konvergiert.

(c) Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n \colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $f_n(z) = z^{-n}$ keine kompakt konvergente Teilfolge besitzt.

5. Aufgabe (0 Punkte)

(a) Formulieren Sie den großen Satz von Montel

Es sei $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$ eine holomorphe Abbildung. Für $s \in \mathbb{R}_{>0}$ betrachte man die Funktion $f_s\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$, $f_s(z) = f(sz)$.

(b) Zeigen Sie, dass $\{f_s \mid s \in \mathbb{R}_{>0}\}$ eine $\mathbb{C}$-normale Familie holomorpher Abbildungen ist.

6. Aufgabe (0 Punkte)

Es sei $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $p\colon X \to \mathbb{C}$, $p(z) = z^2$.

(a) Zeigen Sie: (X, p) ist ein Riemansches Gebiet.

Es sei $f\colon B_1(1) \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sqrt{z}$ ein Zweig der Wurzelfunktion, d.h. f ist holomorph mit $f(z) \cdot f(z) = z$ auf $B_1(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| < 1\}$. Weiter sei $j\colon B_1(1) \to X$ gegeben durch $j(z) = f(z)$ und $\hat{f}\colon X \to \mathbb{C}$, $\hat{f}(z) = z$.

(b) Zeigen Sie, dass $(X, p, j, \hat{f})$ eine analytische Fortsetzung von f ist.

7. Aufgabe (0 Punkte)

Man betrachte die Abbildungen $\gamma_1, \gamma_2\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) = e^{it}$, $\gamma_2(t) = e^{it} + \frac{1}{10}e^{10it}$.

(a) Zeigen Sie, dass γ_1 und γ_2 geschlossene (stetige) Wege in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definieren.

(b) Zeigen Sie, dass γ_1 und γ_2 homotop in $\mathbb{C}^*$ sind.

8. Aufgabe (0 Punkte)

Man betrachte das Gebiet $G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$.

(a) Zeigen Sie, dass die holomorphe Abbildung $f\colon \mathbb{H} \to G$, $f(z) = e^{-iz}$ eine Überlagerung ist.

(b) Begründen Sie kurz, warum $\mathbb{H}$ die universelle Überlagerung von G ist.

(c) Zeigen Sie: $\pi_1(G, 2) \simeq \mathbb{Z}$, wobei $\pi_1(G, 2)$ die Fundamentalgruppe von G mit Basispunkt $z_0 = 2$ bezeichnet.

9. Aufgabe (0 Punkte)

Man betrachte die Riemannsche Fläche $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit Atlas $A = \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$. Dabei ist $U_1 = \mathbb{C}$ mit $\varphi_1(z) = z$ und $U_2 = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ mit $\varphi_2(z) = \frac{1}{z}$ für $z \neq \infty$ und $\varphi_2(\infty) = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$,

$$f(z) = \begin{cases} \infty & \text{, für } z = 1, \\ 0 & \text{, für } z = \infty, \\ \frac{1}{1-z} & \text{, sonst,} \end{cases}$$

holomorph ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$

$$f(z) \begin{cases} \infty & \text{, für } z = -i, \\ 1 & \text{, für } z = \infty, \\ \frac{z-i}{z+i} & \text{, sonst,} \end{cases}$$

holomorph ist.

10. Aufgabe (0 Punkte)

Gegeben sei ein Polynom der Form $f(z) = az^2 + bz + c$, $a, b, c \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Ist $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Überlagerung, so gilt $a = 0$.