12. Blatt zur Vorlesung Elemente der Komplexen Analysis
Abgabe: 24.01.2019 in der Übung

1. Aufgabe (4 Punkte)
Entscheiden Sie bei den folgenden Abbildungen, ob es sich um Überlagerungen handelt:

(a) $f_1 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f_1(z) = 5z - 3$,

(b) $f_2 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f_2(z) = \sin(z)$,

(c) $f_3 \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $f_3(z) = z$,

(d) $f_4 \colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $f_4(z) = z^2$,

(e) $f_5 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f_5(z) = z^2$,

(f) $f_6 \colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, $f_6(z) = \frac{1}{z}$,

(g) $f_7 \colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, $f_7(z) = \frac{1}{z^2}$,

2. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die universellen Überlagerungen $\tilde{X}$ von $X := \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung, die durch $z \mapsto e^z$ definiert wird.

(b) Geben Sie die Gruppe der Decktransformationen $\mathcal{D}(\tilde{X}, X)$ an.

(c) Folgern Sie: $\pi_1(\mathbb{C}^*) \simeq \mathbb{Z}$.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Man betrachte die Riemannsche Fläche $X := \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{D}$ universelle Überlagerung von X ist, indem Sie explizit eine holomorphe Überlagerungsabbildung $p \colon \mathbb{D} \to X$ angeben.
Hinweis: Benutzen Sie zunächst, dass $\mathbb{D}$ und $\mathbb{H}$ biholomorph sind und argumentieren Sie dann mit der Exponentialabbildung.

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)
Gegeben Sei eine Überlagerung $p \colon Y \to X$ und ein geschlossener Weg $\gamma \colon [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = p \in X$. Sei weiter $\hat{\gamma}$ eine Liftung von γ. Untersuchen Sie, ob $\hat{\gamma}$ wieder geschlossen seien muss. Geben Sie dazu einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.