WS 18/19 Prof. Shcherbina / Herrmann

11. Blatt zur Vorlesung Elemente der Komplexen Analysis
Abgabe: 17.01.2019 in der Übung

1. Aufgabe (4 Punkte)
Man betrachte die Menge $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Wir nennen eine Teilmenge $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ offen, wenn U offen in $\mathbb{C}$ ist oder es eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{C}$, sodass $U = \hat{\mathbb{C}} \setminus K$ gilt.

(a) Die offenen Mengen in $\hat{\mathbb{C}}$ bilden eine Topologie τ auf $\hat{\mathbb{C}}$.

(b) $(\hat{\mathbb{C}}, \tau)$ ist ein kompakter Hausdorffraum.
Hinweis zur Kompaktheit: Überlegen Sie, warum in jeder offenen Überdeckung von $\hat{\mathbb{C}}$ eine Menge U vorkommt, sodass $\hat{\mathbb{C}} \setminus U$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist.

Man betrachte die Mengen $U_1 = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$ und $U_2 = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ sowie die Abbildungen $\varphi_j \colon U_j \to \mathbb{C}$, $j = 1, 2$, mit

$$\varphi_1(z) = z, \quad \varphi_2 = \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{, für } z \neq \infty, \\ 0 & \text{, für } z = \infty. \end{cases}$$

(c) Zeigen Sie, dass $A := \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ ein Atlas von $\hat{\mathbb{C}}$ ist.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass φ_j bijektiv ist und dass $\varphi_j, \varphi_j^{-1}$ stetig sind.

(d) Zeigen Sie, dass $\hat{\mathbb{C}}$ zusammen mit der Topologie τ und dem Atlas A eine kompakte Riemannsche Fläche ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} \colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ holomorph ist.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $a \in G$ ein Punkt. Weiter sei $f \colon G \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit einer nicht-hebbaren Singularität in a. Man betrachte die Abbildung $\hat{f} \colon G \to \hat{\mathbb{C}}$,

$$\hat{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{, für } z \neq a, \\ \infty & \text{, für } z = a. \end{cases}$$

Zeigen Sie: $\hat{f}$ ist genau dann holomorph, wenn a eine Polstelle von f ist.
Hinweis: Betrachten Sie für die Rückrichtung die Abbildung $\varphi_2 \circ \hat{f}$ (mit φ_2 aus Aufgabe 1) in einer hinreichend kleinen Umgebung von a.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei (X, p) ein Riemannsches Gebiet. Zeigen Sie, dass X eine Riemannsche Fläche ist, indem Sie einen Atlas verträglicher Karten angeben, sodass p holomorph ist.
Hinweis: Benutzen Sie p, um einen Atlas für X zu konstruieren.

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)
Zeigen Sie: Nicht jede Riemannsche Fläche ist ein Riemannsches Gebiet.
Hinweis: Nehmen Sie an, dass $\hat{\mathbb{C}}$ ein Riemannsches Gebiet mit Projektion p ist und argumentieren Sie mit der Holomorphie von p.