WS 18/19 Prof. Shcherbina / Herrmann

10. Blatt zur Vorlesung Elemente der Komplexen Analysis

Abgabe: 10.01.2019 in der Übung

1. Aufgabe (4 Punkte)

Gegeben Sei die Potenzreihe $g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^{2^j}$.

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe und folgern Sie, dass g auf der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ holomorph ist.

(b) Es sei $(r_n)_{n\geq 1}$ eine reelle Folge in $(0,1)$ mit $\lim_{n\to\infty} r_n = 1$. Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} g(r_n) = \infty$.

(c) Zeigen Sie mittels Induktion, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Identität $g(z) = g(z^{2^k}) + \sum_{j=0}^{k-1} z^{2^j}$ gilt.

(d) Es sei $(z_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{D}$ mit $z_n = r_n \exp(2\pi i m/2^k)$, $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, $r_n \in \mathbb{R}$ und $\lim_{n\to\infty} r_n = 1$. Zeigen Sie mithilfe von (c), dass $\lim_{n\to\infty} g(z_n) = \infty$ gilt.

(e) Folgern Sie, dass sich g nicht analytisch über den Rand von $\mathbb{D}$ hinweg fortsetzen lässt.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Man betrachte die Projektion $p\colon \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$, $p(\mathbf{g}) = z$ für $\mathbf{g} \in \mathcal{O}_z$. Zeigen Sie:

(a) Für $g \in \mathcal{O}(V)$, $V \subset \mathbb{C}$ offen, ist die Einschränkung von p auf $\sigma(g, V)$ injektiv.

(b) p ist lokal topologisch.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$ ein Punkt und $\rho_{z_0}\colon \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}_{z_0}$ wie in der Vorlesung definiert. Zeigen Sie, dass ρ_{z_0} injektiv, aber nicht surjektiv ist.

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und $X(f)$ die vollständige analytische Fortsetzung von f. Zeigen Sie, dass $(\tilde{X}, \tilde{p}, \tilde{j}, \tilde{f})$ definiert durch $\tilde{X} = \mathbb{C}$, $\tilde{p} = \tilde{j} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ und $\tilde{f} = f$ ebenfalls eine analytische Fortsetzung von f ist, welche isomorph zu $X(f)$ ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Wegkomponente von $\sigma(f, \mathbb{C})$ in $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ bereits durch $\sigma(f, \mathbb{C})$ gegeben ist.