9. Blatt zur Vorlesung Elemente der Komplexen Analysis
Abgabe: 20.12.2018 in der Übung

1. Aufgabe (4 Punkte)
Es seien X und Y zwei topologische Räume, $x_0 \in X$ ein Punkt und $f\colon X \to Y$ stetig. Zeigen Sie:

(a) Ist γ ein Weg in X mit Anfangspunkt in x_0 so ist $f \circ \gamma$ ein Weg in Y mit Anfangspunkt in $f(x_0)$.

(b) Sind γ_1 und γ_2 zwei geschlossene und zueinander homotope Wege mit Anfangs- und Endpunkt in x_0, so sind $f \circ \gamma_1$ und $f \circ \gamma_2$ ebenfalls geschlossen und homotop.

(c) Die Abbildung $[f]\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$, $[\gamma] \mapsto [\gamma \circ f]$ ist wohldefiniert und ein Gruppenhomomorphismus.

(d) Wenn f ein Homöomorphismus ist, sind $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(Y, f(x_0))$ isomorph.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heißt Sternförmig bezüglich $z_0 \in G$ wenn für jeden Punkt $z \in G$ die Strecke $[z_0, z]$ von z_0 nach z ebenfalls in G liegt. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet bezüglich $z_0 \in G$.

(a) Zeigen Sie: Jeder Weg γ in G mit Anfangspunkt z_0 ist Nullhomotop.

(b) Es sei $z_1 \in G$ beliebig. Zeigen Sie $\pi_1(G, z_1) = 0$.

(c) Berechnen Sie $\pi_1(\mathbb{C}, 0)$ und $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}, i)$.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Zeigen Sie:

(a) $X := \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ mit der Projektion $p(x, y) = xe^{iy}$ definiert ein Riemannsches Gebiet über $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Berechnen Sie die Faser von p über $-2 \in \mathbb{C}^*$.

(b) Die Abbildung $f\colon X \to \mathbb{C}$, $f(x, y) = \ln(x) + iy$ ist holomorph.

(c) $(\tilde{X}, \tilde{p})$ mit $\tilde{X} = \mathbb{C}$ und $\tilde{p}(z) = e^z$ ist ein Riemannsches Gebiet über $\mathbb{C}^*$. Berechnen Sie die Faser von $\tilde{p}$ über $-2 \in \mathbb{C}^*$.

(d) Die Abbildung $\varphi\colon \tilde{X} \to X$, $\varphi(x + iy) = (e^x, y)$ ist biholomorph.

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)
Verwenden Sie die Ergebnisse von Blatt 8 Aufgabe 2, um zu zeigen, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, 1)$ mindestens $\mathbb{Z}$ als Untergruppe enthält.
Bemerkung: Es gilt sogar $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, 1) = \mathbb{Z}$.