8. Blatt zur Vorlesung Elemente der Komplexen Analysis
Abgabe: 13.12.2018 in der Übung

1. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei $B_1(1)$ die offene Kreisscheibe um 1 mit Radius 1 und $f\colon B_1(1) \to \mathbb{C}$, $f(z) = \log(z)$ eine Logarithmusfunktion mit $f(1) = 0$.

(a) Man betrachte die Funktion $g\colon B_1(1) \to \mathbb{C}$, $g(z) = f(z) + 2\pi i$. Zeigen Sie, dass g durch analytische Fortsetzung von f längs des Weges $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$ entsteht.

(b) Zeigen Sie, dass sich f entlang eines beliebigen Weges in $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ analytisch fortsetzen lässt. Kann man auf diese Weise die Funktion f zu einer holomorphen Funktion auf $\mathbb{C}^*$ fortsetzen?

2. Aufgabe (4 Punkte)
Man betrachte die beiden Wege $\gamma_1, \gamma_2\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) = e^{it}$ und $\gamma_2(t) = e^{2it}$.

(a) Konstruieren Sie explizit eine Homotopie $H\colon [0,1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ zwischen γ_1 und γ_2.

(b) Zeigen Sie, dass $\gamma_1 \sim_U \gamma_2$ für jede offene Umgebung U von $\overline{\mathbb{D}}$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass γ_1 und γ_2 nicht homotop in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sind.
Hinweis: Wählen Sie eine geeignete holomorphe Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *und benutzen Sie, dass ihre Integrale entlang homotoper Wege übereinstimmen müssen.*

3. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $z_0, z_1 \in U$ zwei Punkte. Weiter seien $\gamma_1, \gamma_2\colon [0,1] \to U$ zwei Wege von z_0 nach z_1 mit
$$\gamma_2(t) = \begin{cases} z_0, & \text{für } t \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma_1(2t-1), & \text{für } t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$
Zeigen Sie, dass γ_1 und γ_2 homotop in U sind.

(b) Man betrachte die Abbildungen $\gamma_1, \gamma_2\colon [0,2] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma_1(t) = e^{2\pi i t}$, $t \leq 1$, $\gamma_1(t) = e^{-2\pi i t}$, $t \geq 1$ und $\gamma_2(t) = 1$. Zeigen Sie, dass γ_1 und γ_2 homotop in $\mathbb{C}^*$ sind.

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)
Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie: Enthält $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C})$ zwei oder mehr Elemente, so ist f konstant.
Hinweis: Betrachten Sie die Taylorentwicklung $f(z) = \sum_{j \geq 0} a_j z^j$ *von* f *um* 0 *und betrachten Sie die Fälle* $a_j = 0$ *für fast alle* j *und* $a_j \neq 0$ *für unendlich viele* j *seperat. Untersuchen Sie im zweiten Fall die Singularität in* 0 *der Funktion* $g(z) = f(1/z)$.