7. Blatt zur Vorlesung Elemente der Komplexen Analysis
Abgabe: 06.12.2018 in der Übung

1. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei $\chi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit

$$\chi(x) \geq x,\ \chi'(x) > 0 \text{ und } \chi'(x) \geq (\chi'(x))^2 - \chi(x)\chi''(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}_+.$$

Es sei weiter $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $ds = \lambda|dz|$ eine auf G definierte, reguläre Metrik mit negativer Krümmung.

(a) Zeigen Sie, dass die Metrik ds^* definiert durch $ds^*(z) = \chi(\lambda(z))|dz|$ negative Krümmung auf G hat.

(b) Zeigen Sie, dass $ds^* = \exp(\lambda)|dz|$ negative Krümmung auf G hat.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Konstruieren Sie holomorphe Funktionen $f_1, f_2\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit wesentlichen Singularitäten in 0, sodass $f_1(U \setminus \{0\}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $f_2(U \setminus \{0\}) = \mathbb{C}$ für jede offene Umgebung $U \subset \mathbb{C}$ von 0 gilt.
Hinweis: Untersuchen Sie $z \mapsto \exp(\frac{1}{z})$ und $z \mapsto \exp(\frac{2}{z}) - 2\exp(\frac{1}{z})$.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Umgebung von $a \in \mathbb{C}$ und $f\colon U \setminus \{a\} \to \mathbb{C} \setminus \{b\}$, $b \in \mathbb{C}$, eine holomorphe Abbildung mit einer wesentlichen Singularität in a.

(a) Zeigen Sie: Für jedes $w \in \mathbb{C} \setminus \{b\}$ hat $f^{-1}(\{w\})$ unendlich viele Elemente.

Man betrachte die Funktion $g\colon U \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$, $g(z) : f(z) + \frac{1}{f(z)-b}$.

(b) Zeigen Sie, dass a eine wesentliche Singularität von g ist.

(c) Bestimmen Sie für jedes $w \in \mathbb{C}$ die Anzahl der Elemente in $g^{-1}(\{w\})$.

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)
Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\lambda, \mu\colon U \to \mathbb{R}$ zwei zweimal stetig differenzierbare Funktionen mit $\lambda(z_0) = \mu(z_0)$ und $\lambda \leq \mu$ auf U.

(a) Zeigen Sie: $\frac{\partial\lambda}{\partial z}(z_0) = \frac{\partial\mu}{\partial z}(z_0)$ und $\frac{\partial\lambda}{\partial\bar{z}}(z_0) = \frac{\partial\mu}{\partial\bar{z}}(z_0)$.

(b) Zeigen Sie: $\frac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial\bar{z}}(z_0) \leq \frac{\partial^2\mu}{\partial z\partial\bar{z}}(z_0)$.

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, wieso es ausreicht das Problem für $z_0 = 0$ zu betrachten. Argumentieren Sie anschließend mit der Taylorentwicklung um 0: $\lambda(x+iy) = \lambda(0) + ax + by + rx^2 + sy^2 + txy + o((x+iy)^2)$. In welcher Beziehung stehen $a, b, r, s \in \mathbb{R}$ und $\lambda_z(0), \lambda_{\bar{z}}(0), \lambda_{z\bar{z}}(0)$?

Es sei nun ds eine reguläre hermitesche Metrik auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$.

(c) Beweisen Sie mithilfe von (a) und (b): Ist $d\eta$ eine reguläre Stützmetrik von ds im Punkt $z_0 \in G$, so gilt $K(d\eta, z_0) \geq K(ds, z_0)$.