6. Blatt zur Vorlesung Elemente der Komplexen Analysis
Abgabe: 29.11.2018 in der Übung

1. Aufgabe (4 Punkte)
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher Funktion, $f_n \colon G \to \mathbb{C}$, die kompakt gegen eine Funktion $f \colon G \to \mathbb{C}$ konvergiert.

(a) Zeigen Sie, dass f holomorph ist.

(b) Zeigen Sie, dass für $k \in \mathbb{N}$ die Folge der k-ten Ableitungen $f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \ldots$ kompakt gegen $f^{(k)}$ konvergiert.

Es sei nun $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(G)$ eine normale Familie holomorpher Funktionen und $k \in \mathbb{N}$.

(c) Beweisen Sie, dass die Familie $\{f^{(k)} \mid f \in \mathcal{F}\}$ normal ist.

Hinweis: Verwenden Sie für (a) und (b) die Cauchysche Integralformel.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Für $\alpha > 0$ berechne man die Krümmung der Metrik $ds = \lambda|dz|$ auf $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit

$$\lambda(z) = |z|^{\alpha-1}\sqrt{1+|z|^{2\alpha}}.$$

3. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass es keine stark negativ gekrümmte Metrik auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt, die vollständig ist.
Hinweis: Man untersuche die Familie holomorpher Funktionen $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n(z) = e^{nz}$.

(b) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $S \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass die Menge aller holomorphen Abbildungen von G nach $\mathbb{C} \setminus S$ genau dann normal ist, wenn S zwei oder mehr Elemente besitzt.

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)
Es seien $r < R$ zwei positive reelle Zahlen. Konstruieren Sie eine unendlich oft differenzierbare Funktion $\chi \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften: $\chi(z) = 0$ für $z \in \mathbb{C} \setminus B_R(0)$, $0 < \chi(z) < 1$ für $z \in B_R(0) \setminus \overline{B_r(0)}$, und $\chi(z) = 1$ für $z \in \overline{B_r(0)}$. Hierbei ist $\overline{B_r(0)}$ der Abschluss von $B_r(0)$, wobei $B_r(0)$ und $B_R(0)$ die offenen Kreisscheiben um 0 mit Radius r bzw. R bezeichnen.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(t) = 0$ für $t \leq 0$ und $h(t) = e^{-\frac{1}{t}}$ für $t > 0$.