WS 18/19 Prof. Shcherbina / Herrmann

4. Blatt zur Vorlesung Elemente der Komplexen Analysis

Abgabe: 15.11.2018 in der Übung

1. Aufgabe (4 Punkte)

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet mit der Metrik $ds := \exp(|z|)|dz|$. Zeigen Sie, dass (G, ds) stark negativ gekrümmt ist.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst $K_{ds}(z)$ für $z \neq 0$. Benutzen Sie die Beschränktheit von G um eine geeignete Schranke von K_{ds} auf $G \setminus \{0\}$ anzugeben. Finden Sie anschließend eine negativ gekrümmte Stützmetrik von ds im Punkt $z = 0$.

2. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph, $a, b \in \mathbb{C}$ und γ_1 und γ_2 zwei stückweise C^1-Wege in G von a nach b. Zeigen Sie, dass $\int_{\gamma_1} f dz = \int_{\gamma_2} f dz$ gilt.
Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass das Integral einer auf G holomorphen Funktion entlang eines geschlossenen stückweisen C^1-Weges verschwindet.

(b) Zeigen Sie durch Konstruktion eines Gegenbeispiels, dass die Aussage in (a) für beliebige Gebiete im Allgemeinen falsch ist.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $z_0 \in G$ ein Punkt und $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$. Wir definieren eine Funktion $F\colon G \to \mathbb{C}$ durch $F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{f'(w)}{f(w)} dw := \int_\gamma \frac{f'(w)}{f(w)} dw$ wobei γ ein beliebiger stückweise C^1-Weg in G von z_0 nach z ist.

(a) Folgern Sie aus Aufgabe 2, dass F wohldefiniert ist, d.h. $F(z)$ hängt nicht von der Wahl von γ ab. Zeigen Sie außerdem: F ist holomorph mit $F' = f'/f$.

(b) Zeigen Sie: $f(z_0)\exp(F(z)) = f(z)$ für alle $z \in G$.
Hinweis: Überlegen Sie sich, wieso fe^{-F} konstant ist.

(c) Zeigen Sie mithilfe von (b), dass f eine Wurzel besitzt, d.h. es gibt eine holomorphe Funktion $g\colon G \to \mathbb{C}$ mit $g^2 = f$.

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

(a) Es sei $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$. Zeigen Sie:
Gibt es eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{D}$ mit $\lim_{n\to\infty}(1 - |z_n|^2)|f'(z_n)| = \infty$, so gilt $B_f = \infty$.

(b) Man betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{z}{1-z^2}$. Zeigen Sie: $B_f = \infty$.