BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
Fachgruppe Mathematik und Informatik

Übungen zur Vorlesung Riemannsche Flächen WiSe 2017/2018
Übungsblatt 10

Dr. Rafael Andrist Abgabe: 09.01.2018, 16 Uhr

Aufgabe 1 (12 Punkte) Seien X, Y Riemannsche Flächen, sei $p\colon Y \to X$ eine (unverzweigte) holomorphe Überlagerung, und sei $f\colon Y \to \mathbb{C}$ holomorph. Seien weiter $b \in Y$, $a := p(b)$ und $\varphi := p_*(\rho_b(f)) \in \mathcal{O}_a$. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

1. (Y, b, p, f) ist eine maximale analytische Fortsetzung von φ.

2. Für je zwei verschiedene Punkte $b_1, b_2 \in p^{-1}(a)$ sind die Funktionskeime $\varphi_1 := p_*(\rho_{b_1}(f))$ und $\varphi_2 := p_*(\rho_{b_2}(f))$ verschieden.

Aufgabe 2 (12 Punkte) Sei X eine Riemannsche Fläche und sei $a \in X$. Angenommen $\varphi \in \mathcal{O}_a$ lässt sich entlang jedes Weges in a beginnenden Weges in X analytisch fortsetzen. Sei (Y, b, p, f) die maximale analytische Fortsetzung von φ. Zeigen Sie, dass $p\colon Y \to X$ eine Überlagerung ist.

Aufgabe 3 (12 Punkte) Sei $Y := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \,:\, z^2 = w\}$ und sei $\pi\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}, (z, w) \mapsto w$ die Projektion auf den zweiten Faktor.

(a) Zeigen Sie, dass Y eine Riemannsche Fläche ist und bestimmen Sie die Verzweigungspunkte B von $p = \pi|Y$.

(b) Sei $Y^* := Y \setminus B$. Bestimmen Sie jedes mögliche $b \in Y^*$ das entsprechende $f \in \mathcal{O}(Y^*)$ derart, dass (Y^*, b, p, f) eine analytische Fortsetzung des Hauptzweiges der Quadratwurzel $\sqrt{\cdot}$ in $1 \in \mathbb{C}$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass (Y^*, b, p, f) die maximale analytische Fortsetzung von $\sqrt{\cdot}$ ist.

Aufgabe 4 (12 Punkte) Seien X und Y Riemannsche Flächen sowie $f\colon Y \to X$ eine holomorphe Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass $f^*\colon \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(Y)$ ein Körperhomomorphismus und damit injektiv ist.

(b) Seien nun $X = Y = \mathbb{P}^1$ und $f(z) = z^k, k \geq 2$. Berechnen Sie den Grad der Körpererweiterung $f^*(\mathcal{M}(\mathbb{P}^1)) \subset \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$, bestimmen Sie die Galoisgruppe und finden Sie ein primitives Element sowie dessen Minimalpolynom.

Die Galoisgruppe einer Körpererweiterung L/K ist definiert als

$$\mathrm{Gal}(L/K) := \{\alpha\colon L \to L \text{ Körperisomorphismus } :\ \alpha|_K = \mathrm{id}_K\}$$