BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Fachgruppe Mathematik und Informatik

Übungen zur Vorlesung Riemannsche Flächen WiSe 2017/2018

Übungsblatt 6

Dr. Rafael Andrist Abgabe: 28.11.2017, 16 Uhr

Aufgabe 1 (18 Punkte) Seien X, Y topologische Räume. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Ist X hausdorffsch, so ist jede kompakte Teilmenge von X abgeschlossen.
2. Ist X lokal kompakt, so ist $A \subset X$ genau dann abgeschlossen wenn $A \cap K$ kompakt ist für jede kompakte Teilmenge $K \subset X$.
3. Sind X, Y lokal kompakt, so ist jede eigentliche stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ abgeschlossen.

(*Erinnerung: Per Definition ist jeder lokal kompakte Raum hausdorffsch.*)

Aufgabe 2 (18 Punkte) Seien X, Y Hausdorffräume und sei $p\colon Y \to X$ eine Überlagerung. Sei Z ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender topologischer Raum und sei $f\colon Z \to X$ stetig. Seien $c \in Z$, $a := f(c)$ und $b \in Y$ mit $p(b) = a$. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

(1) Es existiert eine Hochhebung $\tilde{f}\colon Z \to Y$ von f mit $\tilde{f}(c) = b$.

(2) $f_*\pi_1(Z, c) \subset p_*\pi_1(Y, b)$.

Aufgabe 3 (18 Punkte) Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. Sei $\Gamma \subset \mathbb{C}$ ein Gitter, und sei $\pi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ die kanonische Quotientenabbildung. Zeigen Sie, dass π eine Überlagerung ist.
2. Seien $\Gamma, \Gamma' \subset \mathbb{C}$ zwei Gitter, und sei $f\colon \mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{C}/\Gamma'$ eine holomorphe Abbildung. Zeigen Sie, dass es dann eine holomorphe Abbildung $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{C} \arrow[d, "\pi'"] \\ \mathbb{C}/\Gamma \arrow[r, "f"] & \mathbb{C}/\Gamma' \end{tikzcd}$$

3. Klassifizieren Sie alle komplexen Tori bis auf Biholomorphie. Genauer: Die Relation
$$\mathbb{C}/\Gamma \sim \mathbb{C}/\Gamma' :\Leftrightarrow \exists\, f\colon \mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{C}/\Gamma' \text{ biholomorph}$$
definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller komplexen Tori. Geben Sie ein vollständiges Repräsentantensytem der Menge der zugehörigen Äquivalenzklassen an.