BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
Fachgruppe Mathematik und Informatik

Übungen zur Vorlesung Riemannsche Flächen WiSe 2017/2018

Übungsblatt 5

Dr. Rafael Andrist Abgabe: 21.11.2017, 16 Uhr

Aufgabe 1 (12 Punkte) Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass X genau dann hausdorffsch ist, wenn die Diagonale $\Delta := \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 2 (12 Punkte) Seien $X := \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ und $Y := \mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
(a) Zeigen Sie, dass $\sin\colon Y \to X$ eine Überlagerung ist.
(b) Seien $u, v\colon [0, 1] \to X$ die Wege

$$u(t) = 1 - e^{2\pi i t}$$
$$v(z) = -1 + e^{2\pi i t}.$$

Seien $w_1\colon [0, 1] \to Y$ die Liftung von $u \cdot v$ mit $w_1(0) = 0$ und $w_2\colon [0, 1] \to Y$ die Liftung von $v \cdot u$ mit $w_2(0) = 0$. Zeigen Sie, dass

$$w_1(1) = 2\pi \quad \text{und} \quad w_2(1) = -2\pi.$$

Folgern Sie, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ nicht abelsch ist.

Aufgabe 3 (12 Punkte) **(a)** Zeigen Sie, dass

$$\tan\colon \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1$$

ein lokaler Homöomorphismus ist.
(b) Zeigen Sie, dass $\tan(\mathbb{C}) = \mathbb{P}^1 \setminus \{\pm i\}$ und dass

$$\tan\colon \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1 \setminus \{\pm i\}$$

eine Überlagerung ist.
(c) Sei $X := \mathbb{C} \setminus \{it \in \mathbb{C} : t \in \mathbb{R}, |t| \geq 1\}$. Zeigen Sie, dass für jedes $k \in \mathbb{Z}$ genau eine holomorphe Funktion $\arctan_k\colon X \to \mathbb{C}$ existiert mit

$$\tan \circ \arctan_k = \mathrm{id}_X \quad \text{und} \quad \arctan_k(0) = k\pi.$$

Bitte Wenden

Aufgabe 4 (12 Punkte) Berechnen Sie die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Zeigen Sie dazu die folgenden Aussagen:

(i) Ist $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ mit $f(0) = 0$, so gibt es ein $\lambda \in [0, 2\pi)$ mit

$$f(z) = e^{i\lambda} \cdot z \quad \forall\, z \in \mathbb{D}.$$

(ii) Zeigen Sie, dass für jedes $z_0 \in \mathbb{D}$ die Abbildung

$$f_{z_0}(z) := \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$$

einen Automorphismus der Einheitskreisscheibe mit $f_{z_0}(z_0) = 0$ definiert.

(iii) Folgern Sie, dass

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \left\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{D} : f(z) = e^{i\lambda} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \text{ für ein } \lambda \in [0, 2\pi) \text{ und ein } z_0 \in \mathbb{D} \right\}.$$