BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Fachgruppe Mathematik und Informatik

Übungen zur Vorlesung Riemannsche Flächen WiSe 2017/2018

Übungsblatt 4

Dr. Rafael Andrist Abgabe: 14.11.2017, 16 Uhr

Aufgabe 1 (12 Punkte) Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. Ist X wegzusammenhängend, so ist X zusammenhängend.
2. Sei X lokal wegzusammenhänged. Dann ist X genau dann wegzusammenhängend, wenn X zusammenhängend ist.

Aufgabe 2 (12 Punkte) Zeigen Sie, dass die 2-Sphäre $\mathbb{S}^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ einfach zusammenhängend ist.

Hinweis: Es bezeichne $\mathbf{n} := (0,0,1)$ *den "Nordpol" und* $\mathbf{s} := (0,0,-1)$ *den "Südpol" auf* $\mathbb{S}^2$. *Sei* $u\colon I \to \mathbb{S}^2$ *stetig auf dem Intervall* $I := [0,1]$ *mit* $u(0) = u(1) = \mathbf{s}$. *Zeigen Sie zunächst, dass dann ein zu* u *homotoper Weg* $u'\colon I \to \mathbb{S}^2 \setminus \{\mathbf{n}\}$ *mit* $u'(0) = u'(1) = \mathbf{s}$ *existiert. Verwenden Sie anschließend Aufgabe 1 von Übungsblatt 1.*

Aufgabe 3 (12 Punkte) Sei $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ein Gitter in $\mathbb{C}$, und sei $\Gamma' := n\Gamma$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann induziert die Abbildung $\mathbb{C} \ni z \mapsto nz \in \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung $p\colon \mathbb{C}/\Gamma' \to \mathbb{C}/\Gamma$. Zeigen Sie, dass p eine lokal biholomorphe diskrete Abbildung ist, und dass jeder Punkt $a \in \mathbb{C}/\Gamma$ genau N Urbilder unter p hat und bestimmen Sie N.

Aufgabe 4 (12 Punkte) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ gegeben durch $f(z) = \frac{1}{2}(z + 1/z)$ eine verzweigte diskrete Abbildung ist. Bestimmen Sie insbesondere alle Verzweigungspunkte und die zugehörigen Verzweigungsordnungen.