BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
Fachgruppe Mathematik und Informatik

Übungen zur Vorlesung Riemannsche Flächen WiSe 2017/2018
Übungsblatt 3

Dr. Rafael Andrist Abgabe: 07.11.2017, 16 Uhr

Aufgabe 1 (24 Punkte) Sind $f, g \in \mathbb{C}[z]$ so verstehen wir im Folgenden unter der Funktion $\frac{f}{g} \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ immer die holomorphe Erweiterung von $\frac{f}{g} \colon \mathbb{C} \setminus g^{-1}(0) \to \mathbb{C}$ im Sinne von Aufgabe 4 auf Übungsblatt 1.

(a) Seien $x_j, y_k \in \mathbb{P}^1$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq m$, endlich viele fest gewählte Punkte in $\mathbb{P}^1$ und sei

$$f \colon \mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, \ldots, x_n\} \to \mathbb{P}^1 \setminus \{y_1, \ldots, y_m\}$$

ein Biholomorphismus zwischen den Riemannschen Flächen $X := \mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $Y := \mathbb{P}^1 \setminus \{y_1, \ldots, y_m\}$. Zeigen Sie, dass sich f zu einer biholomorphen Abbildung $F \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ fortsetzt; insbesondere ist $m = n$ und $f(\{x_1, \ldots, x_n\}) = \{y_1, \ldots, y_n\}$.

Hinweis: Argumentieren Sie zunächst, dass man oBdA annehmen kann $\infty \notin \{y_1, \ldots, y_m\}$. Betrachten Sie hierfür zu fest gewähltem $a \in Y$ die Abbildung $h \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ gegeben durch $h(z) := \frac{az}{z-a}$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) = \Big\{ h \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1 : h(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ wobei } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ mit } ad - bc \neq 0 \Big\}.$$

(c) Berechnen Sie die folgenden Automorphismengruppen:

1. $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$.
2. $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^*)$.
3. $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1 \setminus \{a, b, c\})$, für beliebig vorgegebene Punkte $a, b, c \in \mathbb{P}^1$.

Aufgabe 2 (12 Punkte) Seien $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$ und $\Gamma := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$. Eine meromorphe Funktion $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1$ heißt *doppelt periodisch bezüglich* Γ, falls

$$f(z + \omega) = f(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ und } \omega \in \Gamma.$$

Es bezeichne $\pi \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. Ist $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1$ eine bezüglich Γ doppelt periodische meromorphe Funktion, so gibt es genau eine meromorphe Funktion $F \colon \mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{P}^1$ mit $f = F \circ \pi$.
2. Ist $F \colon \mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{P}^1$ meromorph, so ist die Abbildung $f := F \circ \pi$ eine bezüglich Γ doppelt periodische meromorphe Funktion.

Bitte Wenden

Aufgabe 3 (12 Punkte) Sei $\Gamma \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. Dann ist die *Weierstraßsche $\wp$-Funktion* definiert durch:

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right)$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Reihe konvergiert und eine holomorphe Abbildung $\mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{P}^1$ induziert.

(b) Sei f eine bezüglich Γ doppelt periodische meromorphe Funktion, deren Polstellenmenge mit Γ übereinstimmt, und welche die folgende Laurentreihenentwicklung in einer Umgebung des Ursprungs besitzt:

$$f(z) = \sum_{k=-2}^{\infty} c_k z^k, \quad \text{wobei } c_{-2} = 1, c_{-1} = c_0 = 0.$$

Zeigen Sie, dass $f = \wp$.

Aufgabe 4 (24 Punkte) Seien $\Gamma := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ und $\Gamma' := \mathbb{Z}\omega_1' + \mathbb{Z}\omega_2'$ zwei Gitter in $\mathbb{C}$, d.h. ω_1 und ω_2 bzw. ω_1' und ω_2' sind $\mathbb{R}$-linear unabhängig. Zeigen Sie:

$$\Gamma = \Gamma' \Longleftrightarrow \exists\, A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \ : \ \begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

(a) Seien Γ und Γ' zwei Gitter in $\mathbb{C}$ und es gebe eine Konstante $t \in \mathbb{C}^*$ derart, dass $t\Gamma \subseteq \Gamma'$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathbb{C} \ni z \mapsto tz \in \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung $\mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{C}/\Gamma'$ induziert, welche genau dann biholomorph ist, falls $t\Gamma = \Gamma'$.

(b) Zeigen Sie, dass jeder Torus $T = \mathbb{C}/\Gamma$ biholomorph auf einen Torus der Form $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + t\mathbb{Z})$ mit $\mathrm{Im}(t) > 0$ abgebildet werden kann.

(c) Seien $T = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + t\mathbb{Z})$ und $T' = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + t'\mathbb{Z})$ zwei Tori mit $\mathrm{Im}(t) > 0$ und $\mathrm{Im}(t') > 0$. Zeigen Sie, dass es eine biholomorphe Abbildung $T \to T'$ gibt, falls

$$\exists \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \ : \ t' = \frac{at+b}{ct+d}$$