BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Fachgruppe Mathematik und Informatik

Übungen zur Vorlesung Riemannsche Flächen WiSe 2017/2018

Übungsblatt 2

Dr. Rafael Andrist — Abgabe: 24.10.2017, 16 Uhr

Aufgabe 1 (24 Punkte) Seien $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$, und man definiere

$$\Gamma := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \{n\omega_1 + m\omega_2 \in \mathbb{C} : n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$z \sim z' :\Leftrightarrow z - z' \in \Gamma$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{C}$ definiert wird. Es bezeichne $\mathbb{C}/\Gamma := \mathbb{C}/\sim$ die zugehörige Menge der Äquivalenzklassen und $\pi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ die kanonische Projektion.

(b) Zeigen Sie, dass durch

$$\tau := \{U \subset \mathbb{C}/\Gamma : \pi^{-1}(U) \text{ ist offen in } \mathbb{C}\}.$$

eine Topologie auf $\mathbb{C}/\Gamma$ definiert wird, und dass $(\mathbb{C}/\Gamma, \tau)$ eine zusammenhängende kompakte topologische Fläche ist.

(c) Zeigen Sie, dass durch

$$\mathfrak{U} := \left\{ (U, \varphi) : \begin{array}{l} U \subset \mathbb{C}/\Gamma \text{ ist offen, so dass es ein offenes } V \subset \mathbb{C} \text{ gibt, auf dem die} \\ \text{Projektion } \pi|_V\colon V \to U \text{ bijektiv ist. Dann sei } \varphi := (\pi|_V)^{-1} \end{array} \right\}$$

ein komplexer Atlas auf $(\mathbb{C}/\Gamma, \tau)$ definiert wird. Es bezeichne $\Sigma := [\mathfrak{U}]$ die induzierte komplexe Struktur. Die Riemannsche Fläche $(\mathbb{C}/\Gamma, \tau, \Sigma)$ heißt komplexer Torus mit Perioden ω_1 und ω_2.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

(a) Sei X eine Riemannsche Fläche und seien $f, g\colon X \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass dann auch die Summe $f + g$ und das Produkt $f \cdot g$ holomorph auf X sind.

(b) Seien X, Y, Z Riemannsche Flächen und seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ holomorph. Zeigen Sie, dass dann auch die Komposition $g \circ f\colon X \to Z$ holomorph ist.

Aufgabe 3 (12 Punkte) Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen Riemannschen Flächen. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

(1) f ist holomorph.

(2) Für jede offene Menge $V \subset Y$ und jede Funktion $\psi \in \mathcal{O}(V)$ ist auch $f^*(\psi) := \psi \circ f \in \mathcal{O}(f^{-1}(V))$.