BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Fachgruppe Mathematik und Informatik

Übungen zur Vorlesung Riemannsche Flächen WiSe 2017/2018

Übungsblatt 1

Dr. Rafael Andrist Abgabe: 17.10.2017, 16 Uhr

Aufgabe 1 Sei $\mathbb{S}^n := \{(\zeta, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : |\zeta|^2 + t^2 = 1\}$ und $\mathbf{n} := (0, 1) \in \mathbb{S}^n$. Zeigen Sie:

(a) Für $p = (\zeta, t) \in \mathbb{S}^n \backslash \{\mathbf{n}\}$ ist der Schnittpunkt $\phi(p)$ des Strahls $\{\mathbf{n} + s(p - \mathbf{n}) : s \geq 0\}$ mit $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \times \{0\}$ der Punkt $\frac{\zeta}{1-t}$.

(b) $\phi\colon \mathbb{S}^n \backslash \{\mathbf{n}\} \to \mathbb{R}^n$ ist ein Homöomorphismus mit Umkehrabbildung

$$\phi^{-1}(x) = \left(\frac{2x}{|x|^2 + 1}, \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \right).$$

(c) Es gilt

$$|\phi^{-1}(x) - \phi^{-1}(x')| = \frac{2|x - x'|}{\sqrt{|x|^2 + 1}\sqrt{|x'|^2 + 1}}$$
$$|\phi^{-1}(x) - \mathbf{n}| = \frac{2}{\sqrt{|x|^2 + 1}}$$

Aufgabe 2 Für $n \geq 1$ sei ∞ ein Element, welches nicht zu $\mathbb{R}^n$ gehört. Wir definieren eine Familie τ von Teilmengen von $X := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ durch die Forderung, dass jede Menge $U \in \tau$ eine der folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

(i) $\infty \notin U$ und U ist offen in $\mathbb{R}^n$ bzgl. der Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$.

(ii) $\infty \in U$ und $K := X \setminus U$ ist kompakt in $\mathbb{R}^n$ bezüglich der Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$.

Zeigen Sie:

(a) τ ist eine Topologie auf X.

(b) (X, τ) ist ein kompakter Hausdorffraum.

Aufgabe 3 Mit der Notation der vorigen beiden Aufgaben definieren wir eine Abbildung $\Phi\colon \mathbb{S}^n \to X$ durch

$$\Phi(p) := \begin{cases} \phi(p) & \text{falls } p \neq \mathbf{n} \\ \infty & \text{falls } p = \mathbf{n} \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass Φ ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 4 Sei $\mathbb{P}^1 := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die Riemannsche Zahlensphäre aus der Vorlesung. Seien ferner $f, g \in \mathbb{C}[z]$ zwei teilerfremde Polynome und $z_1, z_2, \ldots, z_N$ die Nullstellen von g. Zeigen Sie: Die Abbildung $R\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$,

$$R(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{g(z)} & \text{falls } z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_N\} \\ \infty & \text{falls } z \in \{z_1, z_2, \ldots, z_N\} \\ \lim_{w \to \infty} \frac{f(w)}{g(w)} & \text{falls } z = \infty \end{cases},$$

ist holomorph.

*Die Abgabe erfolgt jeweils **Dienstag bis 16 Uhr** in der Vorlesung. Die neuen Übungszettel finden Sie jeden Montag ab 14 Uhr auf der Homepage zur Vorlesung:* `https://www.kana.uni-wuppertal.de/lehre/ws-1718/riemannsche-flaechen`.

Pro Aufgabe gibt es 12 Punkte.