BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

04.04.17

Fakultät 4 - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. N. V. Shcherbina
Dr. T. P. Pawlaschyk
www.kana.uni-wuppertal.de

Nachklausur zur Analysis 1, WiSe 2016/17

Aufgabe 1 (Folgen und Reihen)

(a) (2 P) Wie lautet das Cauchy-Kriterium für Reihen?

(b) (3 P) Überprüfen Sie die Folge $c_n := \dfrac{4^n + (-4)^n}{2^{2n}}$, $n \in \mathbb{N}$, auf Konvergenz. Was sind ihre Häufungswerte?

(c) (5 P) Seien zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ derart gegeben, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} := q > 0$ gilt. Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, wenn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert.

Lösungen zu Aufgabe 1 (a) Eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist genau dann konvergent, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ einen Index N gibt, so dass für alle $m \geq k \geq N$ gilt:

$$\left|\sum_{n=k}^{m} a_n\right| < \varepsilon$$

1 P Voraussetzungen + 1 P Aussage = 2 Punkte

(b) Für n gerade ist

$$c_n = \frac{2 \cdot 4^n}{2^{2n}} = \frac{2 \cdot 2^{2n}}{2^{2n}} = 2$$

Für n ungerade ist $c_n = 0$. Damit hat $(c_n)_n$ mindestens die Häufungswerte 0 und 2 und konvergiert daher nicht.

Angenommen, es gäbe einen weiteren Häufungswert a. Dann existiert eine Teilfolge $(c_{n_k})_k$ von $(c_n)_n$, die gegen a konvergiert. Diese muss unendlich viele gerade oder unendlich viele ungerade Folgenglieder besitzen. Im ersten Fall muss dann $a = 2$ und im zweiten Fall $a = 0$ gelten. Daher sind 0 und 2 die einzigen Häufungswerte.

1 P: Häufungswert 0
1 P: Häufungswert 2
1 P: Begründung: 0 und 2 einzige Häufungswerte

(c) Da der Quotient a_n/b_n gegen q konvergiert, gibt es einen Index N_0 mit

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - q\right| < \frac{q}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad -\frac{q}{2} < \frac{a_n}{b_n} - q < \frac{q}{2}$$

für alle $n \geq N_0$. Nach Umstellen bedeutet das

$$\frac{q}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3q}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{q}{2} b_n < a_n < \frac{3q}{2} b_n < 3a_n$$

für alle $n \geq N_0$.

Ist nun $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, gibt es nach dem Cauchy-Kriterium zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ einen Index $N_1 \geq N_0$, so dass für alle $m \geq k \geq N_1$ gilt:

$$-\varepsilon < \sum_{n=k}^{m} b_n < \varepsilon.$$

Mit den oberen Ungleichungen folgt:

$$-\frac{3q}{2}\varepsilon < -\frac{q}{2}\varepsilon < \frac{q}{2}\sum_{n=k}^{m} b_n < \sum_{n=k}^{m} a_n < \frac{3q}{2}\sum_{n=k}^{m} b_n < \frac{3q}{2}\varepsilon$$

Also

$$\left|\frac{2}{3q}\sum_{n=k}^{m} a_n\right| < \varepsilon$$

Nach dem Cauchy-Kriterium konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Die andere Implikation beweist man analog.

2 P: Abschätzungen für a_n/b_n und Grenzwert q
1 P: Abschätzungen durch Cauchy-Kriterium
1 P: Kombination beider Abschätzungen
1 P: Andere Implikation

Aufgabe 2 (Funktionenfolgen)

(a) (3 P) Geben Sie eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Polynomen p_n an, die gleichmäßig auf kompakten Intervallen $[-\varrho, \varrho]$ gegen die Sinusfunktion konvergiert.

(b) (2 P) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2x}{1+n^2x^4}$ für festes $x \in \mathbb{R}$.

(c) (5 P) Bestimmen Sie größtmögliche Intervalle, auf denen $f_n(x) := \dfrac{n^2x}{1+n^2x^4}$ gleichmäßig konvergiert.

Lösungen zu Aufgabe 2 (a) Laut Definition ist $\sin(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ mit Konvergenzradius $R = \infty$. Wir wählen daher

$$p_n(x) := \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Nach einem Satz aus der Vorlesung konvergiert die Folge $(p_n)_n$ gleichmäßig auf allen kompakten Intervallen $[-\varrho, \varrho]$.

1 P: Reihendarstellung Sinus (Punktweise Konvergenz)
1 P: Polynomfolge angeben
1 P: Glm. Konvergenz begründen

(b) Sei

$$f_n(x) := \frac{n^2x}{1+n^2x^4} = \frac{x}{\frac{1}{n^2}+x^4}$$

(1 Punkt): Für $x = 0$ gilt: $f_n(0) = 0$ für alle n. Daher ist $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

(1 Punkt): Für $x \neq 0$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \dfrac{x}{x^4} = \dfrac{1}{x^3}$.

(c) Da aus der gleichmäßigen Konvergenz die punktweise Konvergenz folgt, müssen wir prüfen, wo $(f_n)_n$ gegen f gleichmäßig konvergiert, wobei nach Teil (b):

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1}{x^3}, & x \neq 0 \end{cases}$$

Nun ist f nur stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Daher vermuten wir gleichmäßige Konvergenz auf $[a, +\infty)$ oder $(-\infty, -a]$ für ein festes $a > 0$.
Sei nun $x \in [a, +\infty)$ für ein festes $a > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f(x)| &= \left|\frac{n^2x}{1+n^2x^4} - \frac{1}{x^3}\right| = \left|\frac{n^2x^4 - 1 - n^2x^4}{x^3(1+n^2x^4)}\right| \\ &= \frac{1}{|x|^3(1+n^2x^4)} \leq \frac{1}{a^3(1+n^2a^4)}\end{aligned}$$

Da $\left(\dfrac{1}{a^3(1+n^2a^4)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, die nicht von x abhängt, finden wir zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index N, so dass für alle $x \in [a, +\infty)$ und $n \geq N$ gilt:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Analog gilt dieselbe Eigenschaft für auf $(-\infty, -a]$.

1 P: Grenzwert f angegeben
2 P: Differenz $|f_n(x) - f(x)|$ angegeben
1 P: Differenz durch Nullfolge abgeschätzt
1 P: Kriterium für glm. Konvergenz richtig angeschrieben

Aufgabe 3 (Differentiation)

(a) (2 P) Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ eine invertierbare, differenzierbare Funktion. Was ist die Ableitung ihrer Umkehrfunktion? Berechnen Sie mit dieser Formel die Ableitung der n-ten Wurzel $g(y)=\sqrt[n]{y}$.

(b) (3 P) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\searrow 0} e^{-x}\log(x)$ und $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\log(x)$.

(c) (5 P) Bestimmen Sie die Extremstellen der Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=x|x+1|e^{-x}$$

Was sind $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$? Skizzieren Sie den Graphen von f über $[-2,3]$.

Lösungen zu Aufgabe 3 (a) Nach einem Satz aus der Vorlesung gilt für die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} an der Stelle $y_0=f(x_0)$ die Formel

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}=\frac{1}{f'(x_0)}$$

Sei $f(x)=x^n$. Dann ist $f'(x)=nx^{n-1}$. Damit ist

$$g'(y)=\frac{1}{n(\sqrt[n]{y})^{n-1}}=\frac{1}{ny^{1-\frac{1}{n}}}=\frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}$$

1 P: Satz

1 P: Ableitung von n-te Wurzel durch Formel

(b) *1 Punkt:* Es ist

$$\lim_{x\searrow 0} e^{-x}\log(x)=-\infty,$$

da $e^0=1$ und $\lim\limits_{x\searrow 0} e^{-x}\log(x)=-\infty$.

2 Punkte: Es ist mit der Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\log(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x)}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{xe^x}=0$$

(c) *1. Fall:* In $x_0=-1$ hat f ein lokales Maximum, da $f(-1)=0$ und $f(x)<0$ für alle $x\in(-2,0)$, $x\neq -1$.

2. Fall: Ist $x>-1$, so ist $f(x)=x(x+1)e^{-x}=(x^2+x)e^{-x}$. Dann berechnen wir

$$\begin{aligned} f'(x)&=(2x+1)e^{-x}-(x^2+x)e^{-x}=(-x^2+x+1)e^{-x}\\ &=-(x^2-x-1)e^{-x} \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung: Es ist $f'(x)=0$ genau dann, wenn $x^2-x-1=0$ bzw.

$$x_1=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\qquad\text{und}\qquad x_2=\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Hinreichende Bedingung I: Wir berechnen

$$\begin{aligned} f''(x)&=(-2x+1)e^{-x}-(-x^2+x+1)e^{-x}=(-2x+1)e^{-x}-f'(x)e^{-x}\\ &=(x^2-3x)e^{-x} \end{aligned}$$

Dann ist $f''(x_1) = (-2x_1 + 1)e^{-x_1} = -\sqrt{5}e^{-x_1} < 0$, da $f'(x_1) = 0$ ist.
Es liegt in $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ein lokales Maximum vor.
Außerdem ist $f''(x_2) = (-2x_2 + 1)e^{-x_2} = \sqrt{5}e^{-x_2} > 0$, da $f'(x_2) = 0$ ist.
Es liegt in $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ein lokales Minimum vor.

Hinreichende Bedingung II: Der Vorfaktor $-x^2 + x + 1$ ist eine nach unten geöffnete Parabel, die in beiden Stellen $x_2 < x_1$ verschwindet, d.h. links von x_1 ist sie positiv und rechts davon negativ. Die erste Ableitung f' hat also einen Vorzeichenwechsel von + nach - nahe x_1. Dort muss daher ein lokales Maximum vorliegen. Für x_2 liegt aus ähnlichen Gründen ein lokales Minimum vor.

3. Fall: Ist $x < -1$, so ist $f(x) = -x(x+1)e^{-x}$. Dann ist

$$f'(x) = (x^2 - x - 1)e^{-x}$$

Notwendige Bedingung: Es ist $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $x^2 - x - 1 = 0$, also x_1 und x_2 wie oben. Da aber $x_1 > x_2 > -1$ sind, gibt es links von -1 keine Extremstellen.

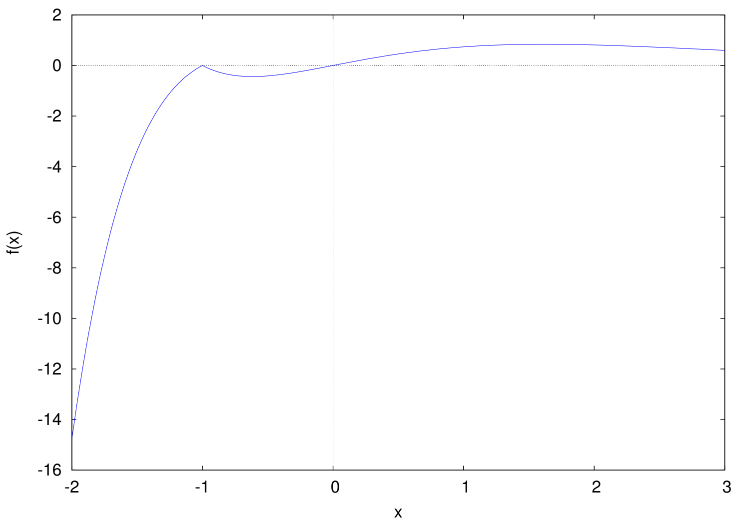
Es sind

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x(x+1)e^{-x} = 0$$

und

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x(x+1)e^{-x} = -\infty$$

nach einem Satz aus der Vorlesung.
Der Graph sieht wie folgt aus:



1 Punkt: $x_0 = -1$ lokales Maximum
2 Punkt: $x_1 = (1+\sqrt{5})/2$ lokales Maximum (Notw. + Hinr. Bed.)
2 Punkt: $x_2 = (1-\sqrt{5})/2$ lokales Maximum (Notw. + Hinr. Bed.)
1 Punkt: Limiten
1 Punkt: Graph

Aufgabe 4 (Integration)

(a) (2 P) Wie lautet der Mittelwertsatz der Integralrechnung?

(b) (3 P) Berechnen Sie das nachfolgende Integral.

$$I_1 = \int_0^1 x^2 \log\sqrt{x}\ dx$$

(c) (3 P) Bestimmen Sie:

$$I_2 = \int_e^\infty \frac{dx}{x\log(x)^2}$$

Lösungen zu Aufgabe 4 (a) Seien $f, \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $\varphi \geq 0$. Dann existiert ein $\xi \in [a,b]$, so dass

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\ dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\ dx$$

1 Punkt Voraussetzung + 1 Punkt Aussage = 2 Punkte

(b) In $x = 0$ ist $\log x$ nicht definiert. Daher schreiben wir

$$I_1 = \int_0^1 x^2 \log\sqrt{x}\ dx = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_\varepsilon^1 x^2\log\sqrt{x}\ dx = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_\varepsilon^1 x^2\log(x)\ dx$$

Anschließend lösen wir mit partieller Integration:

$$\int_\varepsilon^1 \underbrace{x^2}_{=u'}\underbrace{\log(x)}_{=v}\ dx = \frac{1}{3}\Big[x^3\log(x)\Big]_{x=\varepsilon}^1 - \int_\varepsilon^1 \underbrace{\frac{1}{3}x^3}_{=u}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{=v'}\ dx$$

$$= \frac{1}{3}(0-\varepsilon^3\log(\varepsilon)) - \frac{1}{3}\int_\varepsilon^1 x^2\ dx = -\frac{\varepsilon^3\log(\varepsilon)}{3} - \frac{1}{9}(1-\varepsilon^3)$$

Für $\varepsilon \searrow 0$ erhalten wir:

$$I_1 = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{9}\right) = -\frac{1}{18}$$

1 Punkt: Formel angewendet: Partielle Integration

1 Punkt: Richtiges Zwischenergebnis im Integral

1 Punkt: Grenzwert/Endergebnis

(c) Zuerst schreiben wir:

$$I_2 = \lim_{R\to\infty}\int_e^R \frac{dx}{x(\log(x))^2}.$$

Wir substituieren mit $t = \log(x)$, $e^t = x$ und $dx = e^t dt$ und erhalten

$$\int_e^R \frac{dx}{x(\log(x))^2} = \int_1^{\log R}\frac{e^t}{e^t t^2}\ dt = \int_1^{\log R}\frac{dt}{t^2} = \Big[-\frac{1}{t}\Big]_{t=1}^{\log R} = 1 - \frac{1}{\log R}$$

Für $R \to \infty$ erhalten wir:

$$I_2 = 1.$$

1 Punkt: Korrekte Anwendung der Substitutionsregel

1 Punkt: Stammfunktion

1 Punkt: Grenzen eingesetzt + korrekt ausgerechnet