BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

13.02.17

Fakultät 4 - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. N. V. Shcherbina
Dr. T. P. Pawlaschyk
www.kana.uni-wuppertal.de

Lösungen zur Klausur zur Analysis 1, WiSe 2016/17

Klausureinsicht: 15.02.17 in G16.09 von 13-15 Uhr

Aufgabe 1 (Folgen und Reihen)

(a) (2 P) Wie lautet der Satz von Bolzano-Weierstraß?

(b) (3 P) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2} x^{2n}.$$

(c) (5 P) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei reelle Folgen derart, dass $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Zeigen Sie, dass $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$ ein nicht-leeres Intervall ist und dass A aus nur einem Element besteht, falls zusätzlich $\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$ gilt.

Lösungen zu Aufgabe 1

(a) Jede reelle beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

(b1) Substituiere $z = x^2$ und betrachte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2} z^n.$$

Dann ist

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{n^2}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{3}{(\sqrt[n]{n})^2} = 3,$$

da $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Letzteres wurde im Tutorium bewiesen, oder man weiß aus der Vorlesung:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{1}{n}\log n\right) = \exp(0) = 1$$

Mit dem Satz von Cauchy-Hadamard folgt, dass der Konvergenzradius gleich $1/3$ ist. Nach Rücksubstitution $z = x^2$ ist der gesuchte Konvergenzradius gleich $1/\sqrt{3}$.

(b2) Wähle $a_n := \left\{ \begin{array}{ll} \frac{3^n}{n^2}, & n \text{ gerade} \\ 0, & n \text{ ungerade} \end{array} \right\}$ und betrachte die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

Dann ist

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{3^n}{n^2}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[n]{n}} = \sqrt{3}$$

Der Konvergenzradius ist somit $1/\sqrt{3}$.

(b3+b4) Man setze $c_n := \frac{3^n}{n^2}x^{2n}$ für ein festes $x \in \mathbb{R}$ und betrachtet die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. Sie konvergiert, wenn

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{3}{(\sqrt[n]{n})^2}|x|^2 = 3|x|^2 < 1,$$

weil $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, oder

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{3(n+1)^2}{n^2}|x|^2,$$

weil $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, also wenn $|x| < 1/\sqrt{3}$.

Bepunktung wie in b2

(c) Aus der Bedingung $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ folgt

$$a_1 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b_1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $(a_n)_n$ ist monoton steigend und $(b_n)_n$ ist monoton fallend.
Darüberhinaus ist $(a_n)_n$ durch b_1 nach oben beschränkt, und $(b_n)_n$ ist durch a_1 nach unten beschränkt.
Aus einem Satz der Vorlesung folgt, dass $(a_n)_n$ gegen eine Zahl a und $(b_n)_n$ gegen eine Zahl b konvergieren müssen.
Da $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist $a \leq b$. Also ist $\emptyset \neq [a, b] = A$.
Ist zusätzlich $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, so ist

$$0 = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = b - a$$

Also ist $a = b$ und $A = [a, b] = \{a\}$.

Aufgabe 2 (Stetigkeit)

(a) (2 P) Wie lautet der Zwischenwertsatz?

(b) (3 P) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\searrow 0} x^{1/(1+x^2)}$.

(c) (5 P) Sei $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} |x|, & x \in \mathbb{Q} \\ x^3, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{array} \right\}$. Wo ist f stetig und wo nicht? Beweisen Sie Ihre Annahme.

Lösungen zu Aufgabe 2

(a) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < 0 < f(b)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) = 0$.

1 P Voraussetzungen + 1 P Aussage = 2 Punkte

(b) Es ist

$$\lim_{x\searrow 0} x^{1/(1+x^2)} = \lim_{x\searrow 0} \exp\left(\frac{1}{1+x^2}\log x\right) = 0,$$

da

$$\lim_{x\searrow 0} \log(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{1}{1+x^2} = 1$$

$$\lim_{y\to-\infty} e^y = 0$$

(c) Wir vermuten Stetigkeit dort, wo $x^3 = |x|$ gilt. Das ist genau dann der Fall, wenn $x = 0$ oder $x = 1$ ist.

Sei $(x_n)_n$ eine beliebige Folge, die gegen $x_0 = 0$ oder $x_0 = 1$ konvergiert. Da x^3 und $|x|$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$ sind, folgt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. *Das genügt als Antwort.*

Alternativ: Sei $x_0 = 1$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $\delta := \min\{\frac{\varepsilon}{8}, 1\}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-1| < \delta$. Dann ist $|x| < 2$ und es folgt

$$|f(x) - 1| = \left\{ \begin{array}{ll} |x-1|, & x \in \mathbb{Q} \\ |x-1| \cdot |x^2+x+1|, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{array} \right\} < \left\{ \begin{array}{ll} \delta, & x \in \mathbb{Q} \\ 7\delta, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{array} \right\} < \varepsilon$$

Für $x_0 = 0$ wähle man $\delta := \min\{\varepsilon, \frac{1}{2}\}$ und $|x| < \delta$. Dann ist $\delta < 1$, somit $\delta^3 < \delta$, und es folgt

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| = \left\{ \begin{array}{ll} |x| < \delta, & x \in \mathbb{Q} \\ |x|^3 < \delta^3, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{array} \right\} < \varepsilon.$$

Seien $x_0 \in \mathbb{Q} \setminus \{0,1\}$ und $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ eine Folge, die gegen x_0 konvergiert. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^3 = x_0^3 \stackrel{!}{=} |x_0| = f(x_0)$$

Aber das ist nur möglich, falls $x_0 \in \{0,1\}$, ein Widerspruch.

Analog: Seien $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $(x_n)_n \subseteq \mathbb{Q}$ eine Folge, die gegen x_0 konvergiert. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} |x_n| = |x_0| \stackrel{!}{=} x_0^3 = f(x_0)$$

Aber das ist nur möglich, falls $x_0 \in \{0,1\}$, ein Widerspruch.

Insgesamt ist f nur stetig in 0 und 1, sonst nirgends.

Aufgabe 3 (Differentiation)

(a) (2 P) Wie lautet der Mittelwertsatz?

(b) (3 P) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x}+x-1}{1-\cos(2x)}$.

(c) (7 P) Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen der Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad f(x)=|x-1|e^{-x^2}.$$

Was sind $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$? (Mit Begründung!) Skizzieren Sie den Graphen von f über $[-5,5]$.

Lösungen zu Aufgabe 3

(a) Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf (a,b) differenzierbar ist. Dann gibt es ein $\xi\in(a,b)$ mit

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

(b) Es ist

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}+x-1}{1-\cos(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^{-x}+1}{2\sin(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}}{4\cos(2x)}=\frac{1}{4}$$

(c) *1. Fall:* In $x_0=1$ hat f ein lokales Minimum, da $f(1)=0$ und $f(x)>0$ für alle $x\in\mathbb{R}$, denn weder der Betrag noch die Exponentialfunktion werden negativ, und x_0 ist die einzige Nullstelle.

2. Fall: Ist $x>1$, so ist $f(x)=(x-1)e^{-x^2}$. Dann ist

$$f'(x)=e^{-x^2}+(-2x)(x-1)e^{-x^2}=(1-2x^2+2x)e^{-x^2}=(-2)(x^2-x-\frac{1}{2})e^{-x^2}$$

Notwendige Bedingung: Es ist $f'(x)=0$ genau dann, wenn $x^2-x-\frac{1}{2}=0$ bzw.

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$$

Da $x>1$, ist nur $x_1=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ relevant.

Hinreichende Bedingung I: Wir berechnen

$$f''(x)=(-2)(2x-1)e^{-x^2}+(-2x)(-2)(x^2-x-\frac{1}{2})e^{-x^2}=(-2)(2x-1)e^{-x^2}+(-2x)f'(x)$$

$$=(4x^3-4x^2-6x+2)e^{-x^2}$$

Dann ist $f''(x_1)=(-2)(2x_1-1)e^{-x_1^2}=-2\sqrt{3}e^{-x_1^2}<0$, da $f'(x_1)=0$ ist.

Es liegt in x_1 ein lokales Maximum vor.

Hinreichende Bedingung II: Der Vorfaktor $1-2x^2+2x$ ist eine nach unten geöffnete Parabel, die in x_1 verschwindet, d.h. links von x_1 ist sie positiv und rechts davon negativ. Die erste Ableitung f' hat also einen Vorzeichenwechsel von $+$ nach - nahe x_1. Dort muss daher ein lokales Maximum vorliegen.

3. Fall: Ist $x<1$, so ist $f(x)=(1-x)e^{-x^2}$. Dann ist die Rechnung wie im Fall $x>1$ nur mit umgekehrten Vorzeichen, also:

$$f'(x)=-e^{-x^2}+(-2x)(1-x)e^{-x^2}=(-1+2x^2-2x)e^{-x^2}=2(x^2-x-\frac{1}{2})e^{-x^2}$$

Notwendige Bedingung: Es ist $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$ bzw.

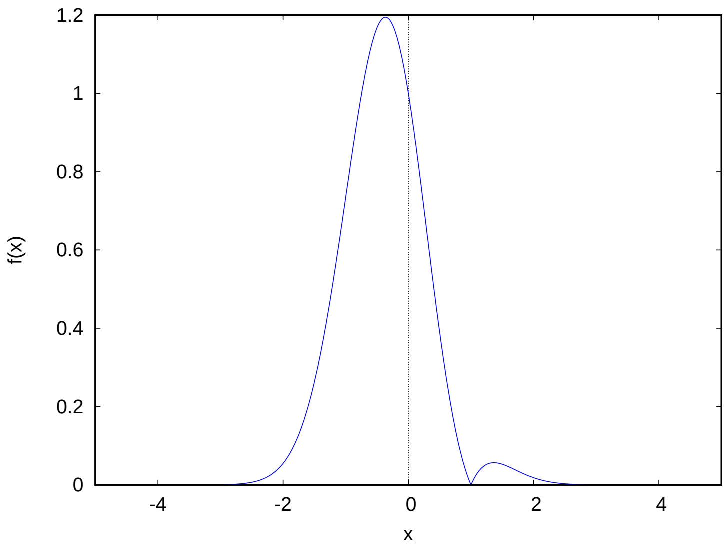
$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Da $x < 1$, ist nur $x_2 = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2}$ relevant.
Hinreichende Bedingung I: Wir berechnen

$$f''(x) = 2(2x-1)e^{-x^2} + 2(x^2 - x - \frac{1}{2})(-2x)e^{-x^2} = 2(2x-1)e^{-x^2} + (-2x)f'(x)$$

$$= -(4x^3 - 4x^2 - 6x + 2)e^{-x^2}$$

Dann ist $f''(x_2) = 2(2x_2 - 1)e^{-x_2^2} = -2\sqrt{3}e^{-x_2^2} < 0$, da $f'(x_2) = 0$. Es liegt in x_2 ebenfalls ein lokales Maximum vor.
Hinreichende Bedingung II: Der Vorfaktor $-1 + 2x^2 - 2x$ ist eine nach oben geöffnete Parabel, die in x_2 verschwindet, d.h. links von x_2 ist sie positiv und rechts davon negativ. Die erste Ableitung f' hat also einen Vorzeichenwechsel von $+$ nach - nahe x_2. Dort muss daher ein lokales Maximum vorliegen.
Es sind $\lim\limits_{x \to \pm\infty} |x-1|e^{-x^2} = 0$ nach einem Satz aus der Vorlesung.
Der Graph sieht wie folgt aus:



Aufgabe 4 (Integration)

(a) (2 P) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Wann nennen wir f Riemann-integrierbar?

(b) (3 P) Berechnen Sie das nachfolgende Integral.

$$I_1 = \int_0^\infty x e^{-\frac{x}{3}}\ dx$$

(c) (3 P) Bestimmen Sie:

$$I_2 = \int_0^{169} \frac{1}{1+\sqrt{x}}\ dx$$

Lösungen zu Aufgabe 4

(a) f ist Riemann-integrierbar, wenn das Oberintegral gleich dem Unterintegral ist. Dabei sind

$$\int_a^{b\,*} f(x)\,dx = \inf\{\int_a^b \varphi(x)\,dx : \varphi \in \tau[a,b],\ \varphi \geq f\}$$

und

$$\int_{a\,*}^{b} f(x)\,dx = \sup\{\int_a^b \varphi(x)\,dx : \varphi \in \tau[a,b],\ \varphi \leq f\},$$

wobei $\tau[a, b]$ die Menge der Treppenfunktionen auf $[a, b]$ ist.

(b) Wir schreiben zuerst

$$I_1 = \int_0^\infty x e^{-\frac{x}{3}}\ dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R x e^{-\frac{x}{3}}\ dx$$

und integrieren partiell

$$\int_0^R \underbrace{x}_{=u}\underbrace{e^{-\frac{x}{3}}}_{=v'}\ dx = \Big[-3xe^{-\frac{x}{3}}\Big]_{x=0}^R - \int_0^R \underbrace{1}_{=u'} \cdot \underbrace{(-3)e^{-\frac{x}{3}}}_{=v}\ dx$$

$$= -3Re^{-\frac{R}{3}} - 9\Big[e^{-\frac{x}{3}}\Big]_{x=0}^R = -3Re^{-\frac{R}{3}} - 9(e^{-\frac{R}{3}} - e^0) = 9 - (3R+9)e^{-\frac{R}{3}}$$

Schließlich ist

$$I_1 = \lim_{R\to\infty} \int_0^R x e^{-\frac{x}{3}}\ dx = 9$$

(c1) Wir substituieren mit $x = t^2 = g(t)$, also $g'(t) = 2t$, $169 = 13^2$ und $0 = 0^2$, und erhalten:

$$I_2 = \int_0^{169} \frac{1}{1+\sqrt{x}}\ dx = 2\int_0^{13} \frac{t}{1+t}\ dt = 2\int_0^{13} \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt$$

$$= 2\Big[t - \log(1+t)\Big]_{t=0}^{13} = 2(13 - \log(14))$$

(c2) Wir substituieren mit $t = 1+\sqrt{x}$, also $x = (t-1)^2 = g(t)$, $g'(t) = 2(t-1)$, $14 = 1+\sqrt{169}$ und $1 = 1 + \sqrt{0}$, und erhalten:

$$I_2 = \int_0^{169} \frac{1}{1+\sqrt{x}}\ dx = 2\int_1^{14} \frac{t-1}{t}\ dt = 2\int_1^{14} \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt$$

$$= 2\Big[t - \log(t)\Big]_{t=1}^{14} = 2(13 - \log(14))$$