BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

27.01.17

Fakultät 4 - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. N. V. Shcherbina
Dr. T. P. Pawlaschyk
www.kana.uni-wuppertal.de

Übungen zur Analysis 1, WiSe 2016/17

Blatt 13

Hinweis:

- Die Aufgaben auf diesem Blatt werden nicht bewertet. Die Punkte dienen nur zur Orientierung für Sie selbst.
- Sie werden im Tutorium in der letzten Vorlesungswoche besprochen.
- Beachten Sie, dass alle Themen der Vorlesung klausurrelevant sind, also auch die Inhalte dieses Blattes.
- Die Struktur des Blattes ähnelt der der Klausur, nicht aber die Themen und der Schwierigkeitsgrad, der etwa dem der bisherigen Übungen entspricht.
- Sie müssen die Beweise, die in der Vorlesung vorgestellt wurden, nicht auswendig lernen. Allerdings müssen logisch schlüssig argumentieren können, d.h. kleinere Beweise führen müssen. Das trainieren Sie am besten, wenn Sie einige Beweise nacharbeiten.

Aufgabe 1 (Uneigentliche Integrale, 2+3+5 Punkte)

(a) Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ und $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Unter welchen Voraussetzung und auf welche Art ist $\int_a^b f(x)dx$ sinnvoll definiert?

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log t}{t^2}\, dt$.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Substitution $t = \dfrac{x}{1+x}$, dass für $m, n > 0$ gilt:

$$\beta(m, n) := \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\, dt = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\, dx$$

Berechnen Sie $\beta(m, n)$ für $m, n \in \mathbb{N}$.

Lösungen zu Aufgabe 1

(a) Für alle $a < c < b$ muss f auf $[a, c]$ integrierbar sein. Dann setzen wir

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{c \nearrow b} \int_a^c f(x)dx.$$

(b) Wir substituieren mit $t = e^x = \varphi(x)$. Dann sind $\varphi'(x) = e^x$, $\lim\limits_{R\to\infty} \varphi(\log R) = \infty$ und $\varphi(0) = 1$. Das Integral lautet dann

$$\int_1^\infty \frac{\log t}{t^2}\, dt = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{\log t}{t^2}\, dt = \lim_{R\to\infty} \int_{\varphi^{-1}(1)}^{\varphi^{-1}(R)} \frac{\log \varphi(x)}{\varphi(x)^2}\, \varphi'(x)dx$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_0^{\log R} \frac{x}{e^{2x}} \cdot e^x \; dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^{\log R} xe^{-x} \; dx$$

Letzteres lösen wir mit partieller Integration:

$$\int_0^{\log R} xe^{-x} \; dx = -\big[xe^{-x}\big]_{x=0}^{\log R} + \int_0^{\log R} 1 \cdot e^{-x} \; dx = -\frac{\log R}{R} - \big[e^{-x}\big]_{x=0}^{\log R}$$

$$= -\frac{\log R}{R} + 1 - \frac{1}{R}$$

Insgesamt gilt also:

$$\int_1^\infty \frac{\log t}{t^2} \; dt = \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{\log R}{R} + 1 - \frac{1}{R} \right) = 1$$

Als Nebenrechnung und nur als Nebenrechnung kann man folgende einfachere Bezeichungen verwenden, um seine Substitution zu prüfen:

Wir wollen $t = e^x$ substituieren und berechnen zunächst $dt(t) = 1$ und $dx(e^x) = e^x$, d.h. $1 \cdot dt = e^x dx$. Für die Grenzen überlegen wir, wann $1 = e^x$ und $\infty = e^x$ gelten. Dann erhalten wir

$$t = e^x, \qquad dt = e^x dx, \qquad 1 = e^0, \qquad \infty = e^\infty,$$

was wir nur noch einsetzen müssen:

$$\int_1^\infty \frac{\log t}{t^2} \; dt = \int_{e^0}^{e^\infty} \frac{\log t}{t^2} \; dt = \int_0^\infty \frac{\log e^x}{(e^x)^2} \; e^x dx$$

(c) Sei $g(x) = x/(1+x) = t$. Dann sind $g(0) = 0$ und $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 1$. Ferner sind $g'(x) = 1/(1+x)^2$ und $1 - t = \frac{1}{1+x}$.

Also ist

$$\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1} \; dt = \lim_{R\nearrow 1} \int_0^R t^{m-1}(1-t)^{n-1} \; dt$$

$$= \lim_{R\nearrow 1} \int_{g^{-1}(0)}^{g^{-1}(R)} g(x)^{m-1}(1-g(x))^{n-1} g'(x) \; dx$$

$$= \lim_{R\nearrow 1} \int_0^{\frac{R}{1-R}} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{m-1} \left(1 - \frac{x}{1+x}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} \; dx$$

$$= \lim_{R\nearrow 1} \int_0^{\frac{R}{1-R}} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}} \; dx = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}} \; dx$$

Ist $n = 1$, so ist $\beta(m,1) = \displaystyle\int_0^1 t^{m-1} \; dt = \frac{1}{m}$. Ist $n > 1$, so benutzen wir die Formel $t^n = t^{n-1} - t^{n-1}(1-t)$ und partielle Integration, um den rekursiven Zusammenhang

$$\beta(m,n) = \frac{n-1}{m}\beta(m,n-1) - \frac{n-1}{m}\beta(m,n),$$

bzw. $\beta(m,n) = \dfrac{n-1}{n+m-1}\beta(m,n-1)$ zu erhalten. Daraus folgt iterativ bzw. induktiv

$$\beta(m,n) = \frac{(n-1)(n-2)}{(n+m-1)(n+m-2)}\beta(m,n-2) =$$

$$\ldots = \frac{(n-1)(n-2)\ldots\cdot 1}{(n+m-1)(n+m-2)\ldots\cdot(m+1)} \underbrace{\beta(m,1)}_{=\frac{1}{m}} \cdot \frac{(m-1)!}{(m-1)!} = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$$

Aufgabe 2 (Reihen und Integrale, 2+5+3 Punkte)

(a) Wie lautet das Integral-Vergleichskriterium für Reihen?

(b) Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{1+n^2}$ konvergiert.

(c) Berechnen Sie $\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2} dx$. Vergleichen Sie hierfür $\int_0^1 \frac{\log x}{1+x^2}$ mit $\int_1^\infty \frac{\log x}{1+x^2}$.

Lösungen zu Aufgabe 2

(a) Sei $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ eine monoton fallende Funktion. Dann gilt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ genau dann konvergiert, wenn $\int_1^\infty f(x)\ dx$ konvergiert.

(b) Nach Aufgabe 1 Teil b) und dem Integral-Vergleichskriterium konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n^2}$, da $\frac{\log(x)}{x^2}$ auf $[e, \infty)$ monoton fallend ist (betrachte dazu z.B., wo die Ableitung dieser Funktion negativ ist). Da $0 \leq \frac{\log(n)}{1+n^2} < \frac{\log(n)}{n^2}$ für alle $n \geq 1$ ist, konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{1+n^2}$ nach dem Majorantenkriterium für Reihen.

(c) Wir substituieren im Integral $\int_1^\infty \frac{\log x}{1+x^2}$ mit $x = 1/t$ und erhalten:

$$\int_1^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\ dx = -\int_0^1 \frac{\log t}{1+t^2}\ dt$$

Damit ist

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{\log x}{1+x^2} dx + \int_1^\infty \frac{\log x}{1+x^2} dx = 0.$$

Aufgabe 3 (Gleichmäßige Konvergenz, 2+3+5 Punkte)

(a) Was verstehen wir unter gleichmäßiger Konvergenz einer Funktionenfolge $f_n : K \to \mathbb{R}$, wobei $K \subset \mathbb{R}$ eine Menge ist?

(b) Sei $f_n(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}$. Berechnen Sie den punktweisen Grenzwert der Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) Bestimmen Sie größtmögliche Intervalle, auf denen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert.

Lösungen zu Aufgabe 3

(a) Sei $K \subset \mathbb{R}$ eine Menge und $f_n : K \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Funktionenfolge. Dann konvegiert $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ auf K, falls für jedes $\varepsilon > 0$ es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und $x \in K$.

(b) Ist $|x| > 1$, so ist $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Für $|x| < 1$ ist $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$. Und für $|x| = 1$ ist $f_n(x) = 1/2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit konvergiert $(f_n)_n$ punktweise gegen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1 \\ 1, & |x| < 1 \\ 1/2, & |x| = 1 \end{cases}$$

(c) Da f unstetig auf $\mathbb{R}$ ist, kommen nur die Intervalle $(-\infty, -a]$, $[-a, a]$ und $[a, +\infty)$ für $0 < a < 1$ in Frage.

Für $x \in (-\infty, -a]$ erhalten wir

$$|f_n(x) - 0| = \frac{1}{1 + x^{2n}} < \frac{1}{1 + (-a)^{2n}} = \frac{1}{1 + a^{2n}}.$$

Da $(1/(1 + a^{2n}))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, kann N so groß gewählt werden, dass $1/(1 + a^{2n}) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ bei beliebigem $\varepsilon > 0$. Da N unabhängig von x ist und nur von a abhängt, konvergiert f_n auf $(-\infty, a]$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

Analog gilt das auf dem Intervall $[a, +\infty)$.

Sei nun $x \in [-b, b]$ mit $0 < b < 1$. Wir betrachten die Differenz

$$|f_n(x) - 1| = \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}} \leq \frac{b^{2n}}{1 + 0^{2n}} = b^{2n}.$$

Da $(b^{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, kann N so groß gewählt werden, dass $b^{2n} < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ bei beliebigem $\varepsilon > 0$. Da N unabhängig von x ist und nur von b abhängt, konvergiert f_n auf $[-b, b]$ gleichmäßig gegen die konstante Funktion 1.

Aufgabe 4 (Taylor-Entwicklung, 2+3+5 Punkte)

(a) Was verstehen wir unter einer Taylorreihe?

(b) Wie ist die Taylorreihe von $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$?

(c) Wie ist der Konvergenzradius dieser Reihe? Konvergiert die Reihe dort gegen $\arctan$?

Lösungen zu Aufgabe 4

(a) Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Dann ist die Tayloreihe von f um den Entwicklungspunkt $x_0 \in (a, b)$ die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$.

(b) Sei $f(x) := \arctan(x)$. Wir berechnen die ersten 5 höheren Ableitungen von f:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \quad f''(x) = -\frac{2x}{(1 + x^2)^2} \quad f'''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(1 + x^2)^3} \quad f^{(4)}(x) = -\frac{24x^3 - 24x}{(1 + x^2)^4}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{120x^4 - 240x^2 + 24}{(1 + x^2)^5}$$

Damit erhalten wir:

$$f'(0) = 1 \quad f''(0) = 0 \quad f'''(0) = -2 \quad f^{(4)}(0) = 0 \quad f^{(5)}(0) = 24$$

Wir stellen fest, dass die geraden Ableitungen in Null verschwinden. Für die ungeraden Ableitungen vermuten wir die Formel $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n(2n)!$.

Das müsste man an dieser Stelle induktiv beweisen, was je nach Funktion leicht ist, oder aber sehr aufwendig wie in unserem Fall, denn man müsste für $\arctan$ im Grunde eine Formel für die n-te Ableitung herausfinden.

Wir umgehen diesen Schritt geschickt durch folgenden Trick und den Erkenntnissen aus der Vorlesung:

Zunächst setzen wir

$$G(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + 1} x^{2n+1}.$$

Wir wollen beweisen, dass dies gerade die Reihendarstellung von $\arctan$ nahe Null ist. Nach einem Satz aus der Vorlesung folgt dann, dass die Potenzreihendarstellung der Taylorreihe entspricht.

Nach dem Kriterium von Cauchy-Hadamard konvergiert die Potenzreihe G auf $(-1, 1)$, da der Konvergenzradius gleich 1 ist. Innerhalb des Konvegenzintervalls $(-1, 1)$ können wir G ableiten und erhalten

$$G'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1 - (-x^2)} = f'(x)$$

Sei nun $h := G - f$. Dann verschwindet die Ableitung von h auf ganz $(-1, 1)$. Somit ist $h = c$ konstant, wobei $c \in \mathbb{R}$. Da $h(0) = 0$ ist, muss $c = 0$ sein. Aber dann gilt $G = f$ auf $(-1, 1)$. Der $\arctan$ hat also in Null die Potenreihendarstellung G und muss dort mit der Taylorreihe T_f übereinstimmen, also $T_f = G = \arctan$ auf $(-1, 1)$.