BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

20.01.17

Fakultät 4 - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. N. V. Shcherbina
Dr. T. P. Pawlaschyk
www.kana.uni-wuppertal.de

Übungen zur Analysis 1, WiSe 2016/17

Blatt 12

Abgabe: bis 27.01.17 bis 10 Uhr in die jeweiligen Fächer auf D13.

Klausuranmeldung: Melden Sie sich über WUSEL bis zum 31.1. an. Sie können Ihre Anmeldung bis zum 6.2. zurückziehen. Ansonsten wird bei Nichtantritt Ihre Prüfung als nicht bestanden gewertet. Zwischen dem 31.1. und dem 5.2. erfahren Sie, ob Sie zur Klausur zugelassen sind. Falls nicht, müssen Sie sich wieder abmelden. Die Zulassung gilt auch für die Nachklausur, zu der Sie sich ebenfalls anmelden müssen, falls Sie sie schreiben möchten. Weitere Informationen sowie Regeln und Tipps für die Klausur finden Sie auf der Homepage.

Aufgabe 1 (Konvexität, 8 Punkte)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Zeigen Sie, dass die Menge K_I der konvexen Funktionen auf I einen konvexen Kegel bildet, d.h. (a) $\lambda f \in K_I$ für alle $\lambda \geq 0$, $f \in K_I$ und (b) $f + g \in K_I$ für alle $f, g \in K_I$.

Aufgabe 2 (Grenzwerte Teil II, 2+3+2+3 Punkte)

(a) Wie lauten die Regeln von de l'Hospital?

(b) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

$$\text{(i)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x - \tan x}{x - \sin x} \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^x}{\log(x+1)} \qquad \text{(iii)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2\sin(x)\cos(x)}{\sin(x^3)}$$

Aufgabe 3 (Riemann-Integral, 2+3+5 Punkte)

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ gegeben.

(a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

(b) Wir wählen die Zerlegung $Z_n = \{a_j = \frac{j}{n} : j \in \{0, \dots, n\}\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die Feinheit $\mu(Z_n)$ und stellen Sie die Riemannsche Summe $S(Z_n, f)$ auf.

(c) Benutzen Sie Teil (a) und (b), um $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4}$ zu zeigen.

Hinweis: Es ist $\arctan(1) = \pi/4$.

Aufgabe 4 (Integration, 2+2+3+2+2+3 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden bestimmten oder unbestimmten Integrale mit Hilfe der partiellen Integration oder der Substitutionsregel.

$$\text{(a)} \quad \int e^{\sin(x)} \cos(x)\, dx \qquad \text{(b)} \quad \int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\, dx \qquad \text{(c)} \quad \int_0^1 \arcsin(x)\, dx$$

$$\text{(d)} \quad \int_1^2 \frac{x^7}{x^4+2}\, dx \qquad \text{(e)} \quad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \qquad \text{(f)} \quad \int \frac{1}{\sin(x)}\, dx$$

Hinweise: Benutzen Sie in Teil (c) den Trick $\arcsin(x) = 1 \cdot \arcsin(x)$. *Substitutieren Sie in Teil (f) mit* $t = \tan(x/2)$