BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

13.01.17

Fakultät 4 - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. N. V. Shcherbina
Dr. T. P. Pawlaschyk
www.kana.uni-wuppertal.de

Übungen zur Analysis 1, WiSe 2016/17

Blatt 11

Hinweis: Schreiben Sie auf Ihre Abgabe Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer(n), die Zettelnummer und die **Nummer Ihrer Gruppe**!!! **Tackern** Sie Ihre Zettel und legen Sie sie ins Postfach Ihres jeweiligen Übungsleiters auf D13. **Abgabe bis 20.01.17 bis 10 Uhr**

Infos zur Klausur und Klausurvorbereitung:

- Melden Sie sich ab dem 16.01. bei WUSEL für die Prüfung am 13.02. an. Der Anmeldeschluss ist der 31.01. Für IT gelten andere Fristen.
- Auf der Homepage erfahren Sie mehr zu der Klausur.
- Die Klausureinsicht findet am 15.02. in G16.09 von 10-12 Uhr statt.
- Beachten Sie, dass Sie sich auch für die Nachklausur über WUSEL anmelden müssen, sofern Sie sie mitschreiben möchten.
- Bereiten Sie sich rechtzeitig auf die Klausur vor. Lernen Sie die Definitionen und die wichtigen Sätze (z.B. diejeingen, die einen Namen tragen), sowie deren Zusammenhänge. Wiederholen Sie die Übungsaufgaben und rechnen Sie ähnliche Aufgaben wie z.B. die Altklausuren, die Sie auf der Homepage finden. Trainieren Sie Rechentechniken wie Bruchrechnen, Potenzgesetze, Ableiten etc. Gehen Sie die Beweise der Vorlesung durch. In der Klausur werden Sie keinen Satz beweisen müssen, allerdings erfordert die Lösung einiger Aufgaben schlüssiges Argumentieren (sprich: kleinere kurze Beweise).
- Der Schwierigkeitsgrad der Klausur entspricht etwa dem der Übungsaufgaben.

Aufgabe 1 (Ableitung der Umkehrfunktion und zweite Ableitung, 4+6 Punkte)

(a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. Berechnen Sie die Ableitung dieser Funktion und die Ableitung ihrer Umkehrfunktion.

(b) Gegeben sei die Funktion $g : (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := \log\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}\right)$. Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen dieser Funktion.

Aufgabe 2 (Extremstellen, 2+4+6+4 Punkte)

(a) Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Was verstehen wir unter einer lokalen Extremstelle von f? Geben Sie im Falle einer zweifach differenzierbaren Funktion f eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer lokalen Extremstelle an.

(b) Beweisen Sie: Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig. Dann hat f in $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Maximum (bzw. Minimum), falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass f auf $(-\varepsilon + x_0, x_0)$ monoton steigend (bzw. fallend) und auf $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ monoton fallend (bzw. steigend) ist.

(c) Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen sowie die Nullstellen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{|x|(x-1)}{1+x^2}.$$

(d) Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten der Funktion f aus Teil (c), indem Sie zeigen, dass $f(x) = 1 + o(1)$ für $x \to \infty$ und $f(x) = -1 + o(1)$ für $x \to -\infty$ gilt. Skizzieren Sie den Graphen von f über $[-5, 5]$.

Hinweise: Geben Sie in Teil (a) die Quelle an. Beachten Sie in Teil (c), dass f im Nullpunkt nicht differenzierbar ist, aber dennoch eine Extremstelle besitzen kann. Das Symbol $o(1)$ ist ein sog. Landau-Symbol. Bitte fertigen Sie eine saubere Skizze an!

Aufgabe 3 (Mittelwertsatz, 2+6+6 Punkte)

(a) Wie lautet der Satz von Rolle? (Geben Sie auch hier die Quelle an.) Der Mittelwertsatz wird aus dem Satz von Rolle gefolgert, indem die Hilfsfunktion

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

benutzt wird. Was bedeutet Sie anschaulich für eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$?

(b) Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$. Zeigen Sie, dass dann f streng monoton steigend ist. Gilt die Umkehrung?

(c) Seien $g, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbare Funktionen. Ferner sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$ und $g(b) \neq g(a)$. Beweisen Sie: Es gibt ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Tipp: Benutzen Sie den Satz von Rolle und eine geeignete Hilfsfunktion wie in Teil (a).