BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

23.12.16

Fakultät 4 - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. N. V. Shcherbina
Dr. T. P. Pawlaschyk
www.kana.uni-wuppertal.de

Übungen zur Analysis 1, WiSe 2016/17

Blatt 10

Hinweis: Schreiben Sie auf Ihre Abgabe Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer(n), die Zettelnummer und die **Nummer Ihrer Gruppe**!!! **Tackern** Sie Ihre Zettel und legen Sie sie ins Postfach Ihres jeweiligen Übungsleiters auf D13. **Abgabe bis 13.01.17 bis 10 Uhr**

Zusatzpunkte: Auf diesem Zettel finden Sie zusätzliche Aufgaben, um die vergangenen Themen zu wiederholen. Bei richtiger Lösung werden Ihnen die Punkte zu Ihrer Gesamtpunktzahl angerechnet. d.h. auf diesem Zettel können Sie 60 von 40 Punkten erreichen.

Wir wünschen allen Studierenden ein frohes Weihnachtsfest, einen guten Rutsch ins neue Jahr und erholsame Ferien!

Aufgabe 1 (Litaraturrecherche: Trigonometrische Reihen, 2+2+2 Punkte)

Recherchieren Sie in Büchern oder im Internet, wie die Sinusreihe $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ und die Kosinusreihe $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ für $x \in \mathbb{R}$ definiert sind. Genauer: Wie sehen a_k und b_k für $k \in \mathbb{N}_0$ aus? Was sind jeweils die Nullstellen der beiden Reihen? Für welche $x \in \mathbb{R}$ nehmen die Reihen die Werte 1 und -1 an? Sind die beiden Reihen beschränkt? Geben Sie stets die Quelle und die Seite an, z.B.

Königsberger, K. Analysis 1, 6. Ausgabe, Springer-Verlag, Berlin, 2004, Seite...

oder O. Riemenschneider, Analysis 1, http://www.math.uni-hamburg.de/home/riemenschneider/anvorl1.pdf, 2. Auflage, 2004, Seite...

Hinweis: Sie müssen in dieser Aufgabe nichts beweisen. Sie dient als Vorbereitung für die nachfolgenden Aufgaben.

Aufgabe 2 (Differenzierbarkeit, 2+6+4 Punkte)

(a) Sei $D \subset \mathbb{R}$ offen, $x_0 \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wann nennen wir f in x_0 differenzierbar? Wie hängen Stetigkeit und Differenzierbarkeit zusammen?

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x = 0$ und $f(x) = x \sin(1/x)$ für $x \neq 0$ im Punkt 0 stetig, aber nicht differenzierbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass für jedes $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha > 1$ die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 0$ für $x = 0$ und $g(x) = x^\alpha \sin(1/x)$ für $x \neq 0$ im Punkt 0 differenzierbar ist.

Aufgabe 3 (Gerade und ungerade Funktionen, 2+2+3+3 Punkte)

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt gerade, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Sie heißt ungerade, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Ist f gerade und differenzierbar, so ist die Ableitung f' ungerade.

(b) Ist f ungerade und differenzierbar, so ist die Ableitung f' gerade.

(c) Jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kann als Summe einer geraden Funktion g und einer ungeraden Funktion h dargestellt werden.

(d) Überprüfen Sie, ob die Sinus- und Kosinusreihe gerade oder ungerade sind.

Aufgabe 4 (3+3+3+3 Punkte)

Gegeben sei eine positive reelle Konstante $a > 0$. Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen $f_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, 4$, die wie folgt gegeben sind.

$$f_1(x) = x^{(x^x)}, \quad f_2(x) = x^{(x^a)}, \quad f_3(x) = x^{(a^x)}, \quad f_4(x) = a^{(x^x)}$$

Hinweis: Für x, y positiv ist $x^y := \exp(y \cdot \log(x))$.

Zusatzaufgabe 1 (Doppelinduktion, 2+6 Punkte)

(a) Für $k, n \in \mathbb{N}$ seien die Aussagen $A(k, n)$ gegeben. Angenommen, die drei folgenden Aussagen sind richtig:

(i) Die Aussage $A(1, 1)$ ist richtig.

(ii) Ist $A(1, n)$ richtig für $n \in \mathbb{N}$, so auch $A(1, n + 1)$.

(iii) Ist $A(k, n)$ richtig für $k \in \mathbb{N}$ und festes $n \in \mathbb{N}$, so auch $A(k + 1, n)$.

Zeigen Sie, dass dann alle Aussagen $A(k, n)$ für $k, n \in \mathbb{N}$ richtig sind.

(b) Beweisen Sie mit Hilfe der Doppelinduktion über $k, n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{l=0}^{k} \binom{n+l}{l} = \binom{n+k+1}{k}$$

Zusatzaufgabe 2 (Konvergenz, 6+6 Punkte)

(a) Es sei $(a_n)_n$ eine Nullfolge. Zeigen Sie, dass dann auch $(b_n)_n$ mit

$$b_n := \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

eine Nullfolge ist.

(b) Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Sinus- und der Kosinusreihe.