BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

16.12.16

Fakultät 4 - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. N. V. Shcherbina
Dr. T. P. Pawlaschyk
www.kana.uni-wuppertal.de

Übungen zur Analysis 1, WiSe 2016/17

Blatt 9

Hinweis: Schreiben Sie auf Ihre Abgabe Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer(n), die Zettelnummer und die **Nummer Ihrer Gruppe**!!! **Tackern** Sie Ihre Zettel und legen Sie sie ins Postfach Ihres jeweiligen Übungsleiters auf D13. **Abgabe bis 23.12.16 bis 10 Uhr**

Sprechstunden: Falls Sie mathematische Fragen haben, können Sie diese während der Vorlesung, der Übung oder dem Tutorium stellen. Außerhalb unserer Veranstaltungen bieten wir folgende Sprechstunden an:

Mi, 12-12:45 Uhr, Raum G.15.19 (Prof. Shcherbina)

Di, 14-15 Uhr, Raum G16.04 (Dr. Pawlaschyk, Assistenz)

Aufgabe 1 (Stetigkeit, 10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \notin \mathbb{Q} \text{ oder } x = 0, \\ \frac{1}{m} & \text{für} \quad x = \frac{n}{m} \text{ mit } n \in \mathbb{Z} - \{0\},\ m \in \mathbb{N},\ \operatorname{ggT}(n, m) = 1. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, an welchen Stellen diese Funktion stetig ist.

Aufgabe 2 (Zwischenwertsatz, 1+5 Punkte)

(a) Wie lautet der Zwischenwertsatz?

(b) Sei $f : [0, 1] \to [0, 1]$ stetig. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt besitzt, d.h. es existiert ein $a \in [0, 1]$ mit $f(a) = a$. Betrachten Sie hierzu die Funktion $h(x) := f(x) - x$.

Aufgabe 3 (Gleichmäßige Stetigkeit, 3+5 Punkte)

(a) Wie ist die gleichmäßige Stetigkeit definiert, und wie ist der Zusammenhang zur gewöhnlichen Stetigkeit? Was ist der Unterschied zwischen beiden Stetigkeitsbegriffen? Geben Sie eine stetige Funktion an, die nicht gleichmäßig stetig ist.

(b) Ist die Quadratwurzelfunktion $\sqrt{\ } : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ gleichmäßig stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (Allgemeine Potenz a^x, 2+2+2+2 Punkte)

Gegeben sei eine positive reelle Zahl a. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Funktion $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\exp_a(x) = \exp(x \cdot \log a)$ ist stetig.

(b) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y)$.

(c) Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\exp_a(n) = a^n$.

(d) Für alle $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ gilt $\exp_a(p/q) = \sqrt[q]{a^p}$.

Aufgabe 5 (Grenzwerte, 2+2+2+2 Punkte)

Gegeben seien ein $k \in \mathbb{N}$ und eine positive reelle Zahl $\alpha > 0$. Beweisen Sie die folgenden Beziehungen.

$$\lim_{x\to\infty} x^k e^{-x} = 0, \quad \lim_{x\downarrow 0} x^k e^{1/x} = \infty, \quad \lim_{x\downarrow 0} x^\alpha = 0, \quad \lim_{x\downarrow 0} x^{-\alpha} = \infty,$$

Hinweis: Es sind Beweise gefordert. Begründungen wie „ e^{-x} geht für x gegen Unedlich schneller gegen Null als x^k gegen Unendlich“ reichen nicht aus.