BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

09.12.16

Fakultät 4 - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. N. V. Shcherbina
Dr. T. P. Pawlaschyk
www.kana.uni-wuppertal.de

Übungen zur Analysis 1, WiSe 2016/17

Blatt 8

Hinweis: Schreiben Sie auf Ihre Abgabe Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer(n), die Zettelnummer und die **Nummer Ihrer Gruppe**!!! **Tackern** Sie Ihre Zettel und legen Sie sie ins Postfach Ihres jeweiligen Übungsleiters auf D13. **Abgabe bis 16.12.16 bis 10 Uhr**

Lernhinweis zum Stetigkeitsbegriff: Auf **Streaming-Portalen** finden Sie online zahlreiche Videos zum Thema Stetigkeit, die durch Skizzen anschaulich diesen Begriff sowie die dazu gehörenden Kriterien mit Hilfe von einfachen Beispielen erklären. Schauen Sie sich zunächst derartige Videos an und arbeiten Sie die Vorlesung nach, bevor Sie mit dem Übungszettel beginnen.

Aufgabe 1 (Zusammenhang, 2+6 Punkte)

(a) Was ist die Definition einer zusammenhängenden Menge A in $\mathbb{R}$?

(b) Gegeben seien zwei zusammenhängende Mengen $A \subset \mathbb{R}$ und $B \subset \mathbb{R}$ mit $A \cap B \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass $A \cup B$ dann ebenfalls zusammenhängend ist.

Aufgabe 2 (Mengen und Funktionen, 4+2+2 Punkte)

Gegeben sei eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ für $D \subset \mathbb{R}$. Für eine Teilmenge $M \subset D$ definieren wir das Bild von M unter f durch $f(M) := \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in M : f(x) = y\}$.

a) Beweisen Sie die Beziehung

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

b) Beweisen Sie die Beziehung

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

c) Konstruieren Sie ein Beispiel mit

$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B).$$

Aufgabe 3 (Stetigkeit, 2+6+4 Punkte)

(a) Sei eine Menge $D \subset \mathbb{R}$ gegeben. Was ist ein Berührpunkt a von D? Sei ferner eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben. Was verstehen wir unter $\lim_{x \to a} f(x) = c$? Geben Sie jeweils die formale Definition wieder.

(b) Sei a ein Berührpunkt von D und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

(*) $\lim_{x \to a} f(x) = c$

(**) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in D\ :\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$

(In diesem Fall schreiben wir $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.)

(c) Zeigen Sie, dass die nachstehenden drei Aussagen äquivalent sind.

(i) $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $a \in \mathbb{R}$. (ε-δ-Kriterium)

(ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

(iii) Zu jeder offenen Menge $V \subset \mathbb{R}$, die $f(a)$ enthält, gibt es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}$, die a enthält, sodass $U \cap D \subset f^{-1}(V) := \{x \in D \mid f(x) \in V\}$.

Aufgabe 4 (Stetige Funktionen, 6+6 Punkte)

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums, dass $f(x) = -3x^2$ stetig in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ ist.

(b) Sei $[x]$ die Gauß-Klammer aus Blatt 3, Aufgabe 4. Skizzieren Sie den Graphen von $g(x) = x - [x]$ für $x \in \mathbb{R}$. Wo ist f stetig und wo nicht? Begründen Sie Ihre Antwort.