BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

02.12.16

Fakultät 4 - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. N. V. Shcherbina
Dr. T. P. Pawlaschyk
www.kana.uni-wuppertal.de

Übungen zur Analysis 1, WiSe 2016/17

Blatt 7

Hinweis Schreiben Sie auf Ihre Abgabe Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer(n), die Zettelnummer und die **Nummer Ihrer Gruppe**!!! **Tackern** Sie Ihre Zettel und legen Sie sie ins Postfach Ihres jeweiligen Übungsleiters auf D13. **Abgabe bis 09.12.16 bis 10 Uhr**

Beweise Bearbeiten Sie unbedingt die Beweise aus der Vorlesung nach. Es ist mitunter eines der besten Mittel, den Stoff besser zu verstehen. Dadurch begreifen Sie den Zusammenhang zu bereits vorgestellten Inhalten besser, lernen Beweismethoden kennen und außerdem wie man schlüssig im Sinne der Aussagenlogik argumentiert. Kleinere Beweisaufgaben wird es auch in der Klausur geben.

Aufgabe 1 ((Unendliche) Vereinigungsmenge und Schnittmenge, 2+4+4 Punkte)

Beweisen Sie für Mengen A und B die folgenden Aussagen:

(a) $(A \setminus B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$

(b) $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$

(c) Sei $\mathcal{A} = \{A_j\}_{j \in J}$ eine Menge von Mengen $A_j \subset \mathbb{R}$, wobei J eine beliebige Indexmenge ist. Wir definieren nun die Vereinigungsmenge und die Schnittmenge aller Mengen aus $\mathcal{A}$. Wir sagen, dass x in $\bigcup\limits_{j \in J} A_j$ enthalten ist, wenn es ein $j \in J$ mit $x \in A_j$ gibt. Ferner sagen wir, dass x in $\bigcap\limits_{j \in J} A_j$ enthalten ist, wenn $x \in A_j$ für jedes $j \in J$ ist. Zeigen Sie:

$$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j \in J} A_j = \bigcap_{j \in J} (\mathbb{R} \setminus A_j) \qquad \text{und} \qquad \bigcup_{j \in J} (\mathbb{R} \setminus A_j) = \mathbb{R} \setminus \bigcap_{j \in J} A_j.$$

Aufgabe 2 (Kompaktheit, 4+4+4 Punkte)

Beweisen Sie jeweils die folgenden Aussagen.

(a) Es sei J eine Indexmenge und $\{K_j\}_{j \in J}$ eine Menge von kompakten Mengen $K_j \subset \mathbb{R}$. Dann ist die Schnittmenge $K = \bigcap\limits_{j \in J} K_j$ ebenfalls kompakt.

(b) Es sei M eine endliche Indexmenge und $\{K_j\}_{j \in M}$ eine Menge von kompakten Mengen $K_j \subset \mathbb{R}$. Dann ist die Vereinigungsmenge $K = \bigcup\limits_{j \in M} K_j$ ebenfalls kompakt.

(c) Es gibt eine (unendliche) Menge I, z.B. $I = \mathbb{N}$, von kompakten Mengen K_j, $j \in I$, so dass die Vereinigungsmenge $K = \bigcup\limits_{j \in I} K_j$ nicht kompakt ist.

Aufgabe 3 (Nicht-kompakte Mengen, 4+4+4+2+2+2 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Mengen $[0,1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$, $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ und $[0,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\}$ nicht kompakt sind, indem Sie jeweils eine offene Überdeckung finden, die keine endliche Teilüberdeckung enthält. Welche dieser Mengen sind abgeschlossen und welche sind beschränkt? Begründen Sie Ihre Antwort.