BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

25.11.16

Fakultät 4 - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. N. V. Shcherbina
Dr. T. P. Pawlaschyk
www.kana.uni-wuppertal.de

Übungen zur Analysis 1, WiSe 2016/17

Blatt 6

Hinweis Schreiben Sie auf Ihre Abgabe Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer(n), die Zettelnummer und die **Nummer Ihrer Gruppe**!!! **Tackern** Sie Ihre Zettel und legen Sie sie ins Postfach Ihres jeweiligen Übungsleiters auf D13. **Abgabe bis 02.12.16 bis 10 Uhr**

Bitte vorher lesen! Um die Aufgabenstellungen der Übungen zu verstehen und um die Übungsaufgaben in angemessener Weise lösen zu können, ist es wichtig, dass Sie vorher die Vorlesung und das Tutorium, aber auch die Korrekturen Ihrer Abgaben nacharbeiten und sich mit den Themen intensiv auseinandersetzen.

In den nachfolgenden Aufgaben 1 und 2 sehen Sie eine schrittweise Anleitung, wie Sie in vier Stufen (a) *Wissen abfragen*, (b) *Thema verstehen*, (c) *Wissen anwenden* und (d) *Problem lösen* die in der Vorlesung neu eingeführten Begriffe erlernen und verstehen. Dieses Lernprinzip können Sie dann selbstständig als Vorbereitung für die Aufgaben 3 und 4 benutzen.

Bitte schreiben Sie einen kurzen Kommentar, ob Ihnen die Anwendung des o.g. Lernprinzips beim Lösen der Aufgaben zum Verständnis des Vorlesungssoffes geholfen hat.

Aufgabe 1 (Supremum und Infimum, 1+2+3+4 Punkte)

(a) Geben Sie jeweils die Definition des Supremums und des Infimums einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ wieder.

(b) Seien $a < b$ und $D = (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ ein Intervall. Zeigen Sie (mit Hilfe der Definitionen aus (a)), dass $\sup D = b$ und $\inf D = a$ sind.

(c) Bestimmen Sie das Supremum und Infimum der Menge $A = \left\{\frac{x-y}{x+y} \mid x, y \in \mathbb{R},\ x, y > 0\right\}$.

(d) Für zwei Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$ definieren wir $A + B := \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$. Beweisen Sie die Gleichung:

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

Aufgabe 2 (Limes superior und Limes inferior, 2+2+4+4 Punkte)

(a) Geben Sie jeweils die Definition des Limes superiors und Limes inferiors einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wieder.

(b) Gegeben sei die rekursiv definierte Folge aus Blatt 5, Aufgabe 1b). Bestimmen Sie den Limes superior und den Limes inferior dieser Folge.

(c) Formulieren Sie eine ähnliche Aussage wie Satz 8.3 aus der Vorlesung für den Limes inferior und beweisen Sie sie. Der Satz 8.3 lautet:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $a \in \mathbb{R}$. Genau dann gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n = a$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind: (1) Für fast alle Indizes $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n < a + \varepsilon$ und (2) es gibt unendlich viele Indizes $m \in \mathbb{N}$ mit $a_m > a - \varepsilon$.

(d) Seien zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n =: a \in \mathbb{R}$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} b_n =: b \in \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie:

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

Aufgabe 3 (Wurzelkriterium, 4+4 Punkte)

Überprüfen Sie, ob die folgenden beiden Reihen konvergieren, indem Sie das Wurzelkriterium anwenden.

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{-3n} (n!)^n \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5 + 2(-1)^n} \right)^{2n}$$

Aufgabe 4 (Cauchy-Hadamard- und Euler-Formel für Potenzreihen, 5+5 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius der beiden nachstehenden Potenzreihen.

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 10 n^4 x^n \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n x^{3n}}{5}$$

Hinweis: Die Potenzreihe in Teil (ii) muss auf die Form $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ *gebracht werden, bevor man die in der Vorlesung vorgestellten Sätze zur Berechnung der Konvergenzradien benutzen kann.*