BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

18.11.16

Fakultät 4 - Mathematik und Naturwissenschaften
Prof. N. V. Shcherbina
Dr. T. P. Pawlaschyk
www.kana.uni-wuppertal.de

Übungen zur Analysis 1, WiSe 2016/17

Blatt 5

Hinweis Schreiben Sie auf Ihre Abgabe Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer(n), die Zettelnummer und die **Nummer Ihrer Gruppe**!!! **Tackern** Sie Ihre Zettel und legen Sie sie ins Postfach Ihres jeweiligen Übungsleiters auf D13. **Abgabe bis 25.11.16 bis 10 Uhr**

Aufgabe 1 (Teilfolgen + Monotonie, 8+4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $a_n = \frac{n!}{n^n}$ monoton fällt, indem Sie den Quotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ betrachten. Weisen Sie induktiv nach, dass $n! \leq n^{n-2}$ für alle $n \geq 5$ ist. Folgern Sie, dass $(a_n)_n$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

(b) Wir sagen, dass a ein *Häufungswert der Folge* $(a_n)_n$ ist, falls es eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ gibt, die gegen a konvergiert.

Bestimmen Sie die Häufungswerte der Folge $(a_n)_n$, die rekursiv durch $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ und $a_1 = a_2 = 1$ definiert wird.

Aufgabe 2 (Reihenkonvergenz, 4+4+4+4 Punkte)

Untersuchen Sie nachstehenden Reihen auf Konvergenz, indem Sie das Majoranten-, Quotienten- oder Leibniz-Kriterium (und/oder weitere Kritierien aus der Vorlesung) anwenden.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n((1-(-1)^n)^{(-1)^n})^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{7 \cdot 3^n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{4+(-1)^n}\right)^n$

Aufgabe 3 (Cauchy-Produkt u. Exponentialfunktion, 6+6 Punkte)

(a) Zeigen Sie: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$ für alle $x \in (-1, 1)$.

(b) Weisen Sie induktiv nach, dass $\exp(n) = e^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt.

Hinweis: Es ist $e := \exp(1)$, *wobei* $\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ *ist. Sie müssen also* $\exp(n) = (\exp(1))^n$ *zeigen.*