



28.10.16

## Übungen zur Analysis 1, WiSe 2016/17

### Blatt 2

**Hinweis** Schreiben Sie auf Ihre Abgabe Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer(n), die Zettelnummer und die **Nummer Ihrer Gruppe!!!** und legen Sie Ihre Lösungen ins Postfach Ihres jeweiligen Übungsleiters auf D13. **Abgabe bis 04.11.16 bis 10 Uhr**

#### Aufgabe 1 (Binomialentwicklung, 4+4 Punkte)

Zeigen Sie: (a)  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$  (b)  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

#### Aufgabe 2 (Symmetrische Differenz, 4+4 Punkte)

Für zwei beliebige Mengen  $A$  und  $B$  definieren wir die symmetrische Differenz  $A\Delta B$  durch:

$$A\Delta B := \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}.$$

- Zeigen Sie, dass die symmetrische Differenz kommutativ ist.
- Vereinfachen Sie den Ausdruck

$$(A\Delta B) \cap (B\Delta C) \cap (C\Delta A)$$

und beweisen Sie Ihre Behauptung.

#### Aufgabe 3 (Rechenregeln, 2+2+2+2+2+2=12 Punkte)

Leiten Sie folgende Aussagen aus den Axiomen der reellen Zahlen ab:

- (2.11)  $\forall x \in \mathbb{R} : x \cdot 0 = 0$
- (2.12)  $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$
- (2.13)  $\forall x \in \mathbb{R} : -x = (-1) \cdot x$
- (2.14)  $\forall x, y \in \mathbb{R} : (-x) \cdot (-y) = x \cdot y$
- (2.15)  $\forall x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \Rightarrow (x^{-1})^{-1} = x$
- (2.16)  $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge y \neq 0 \Rightarrow (x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$

Benutzen Sie folgende Abkürzungen für die Körperaxiome:

- A1 Assoziativität der Addition
- A2 Kommutativität der Addition
- A3 Existenz einer Null
- A4 Existenz des Negativen
- M1 Assoziativität der Multiplikation
- M2 Kommutativität der Multiplikation
- M3 Existenz einer Eins
- M4 Existenz des Inversen
- D Distributivgesetz

#### Aufgabe 4 (Doppelsummen, 4+4 Punkte)

Beweisen Sie induktiv, dass  $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$  ist, und berechnen Sie damit  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (ij)^3$ .