BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften

Übungen zur Analysis II WS 2014/2015

Übungsblatt 11

Prof. Dr. Nikolay Shcherbina — Abgabe: 07.01.2015, 12 Uhr

Aufgabe 1 Zeigen Sie, dass das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1 + \cos(y_1 y_2) &= y_2 x_1 + 1 \\ \sin y_1 &= x_2 + y_2 \end{aligned}$$

in einer Umgebung des Punktes $(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0) = (0, -1, 0, 1)$ nach $y = (y_1, y_2)$ aufgelöst werden kann, und berechnen Sie die Ableitungen

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x_1^0, x_2^0) \quad (i, j = 1, 2).$$

Aufgabe 2 Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y) := \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}.$$

1. Stellen Sie fest, an welchen Punkten diese Funktion eine lokale Inverse besitzt.
2. Zeigen Sie, dass die Abbildung f surjektiv ist und jeder Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ genau zwei Urbildpunkte hat.

Aufgabe 3 Betrachten Sie die kubische Gleichung

$$0 = X^3 - b_1 X^2 + b_2 X - b_3 = (X - a_1)(X - a_2)(X - a_3)\,,$$

wobei für das Koeffiziententripel $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ und das Lösungstripel $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ gelte: a_1, a_2 und a_3 sind paarweise verschieden. Zeigen Sie, dass die Lösungstripel (x_1, x_2, x_3) aus einer Umgebung von (a_1, a_2, a_3) bijektiv und stetig differenzierbar von den Koeffiziententripeln (y_1, y_2, y_3) aus einer Umgebung von $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ abhängen.
Hinweis: Zeigen Sie, dass gilt $(y_1, y_2, y_3) = f(x_1, x_2, x_3)$, indem Sie f explizit bestimmen, und dass für die Jacobideterminante gilt: $\det Df(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)$.

BITTE WENDEN

Aufgabe 4 Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := 4x^2 - 3xy.$$

Finden Sie alle lokalen Extrema auf der abgeschlossenen Kreisscheibe

$$K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die lokalen Extrema im Inneren der Kreisscheibe und untersuchen Sie anschließend die Funktion unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

Pro Aufgabe gibt es 12 Punkte.