

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL  
Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften

Übungen zur Analysis II WS 2014/2015  
Übungsblatt 9

Prof. Dr. Nikolay Shcherbina

Abgabe: 10.12.2014, 12 Uhr

---

**Aufgabe 1** Gegeben seien die zweimal stetig differenzierbaren Funktionen

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

- a) Beweisen Sie die Beziehung  $\text{Hess}(f + g) = \text{Hess}(f) + \text{Hess}(g)$ .
- b) Bestimmen sie die Hessematrix  $\text{Hess}(f \cdot g)$  des Produktes von  $f$  und  $g$ .
- c) Bestimmen sie die Hessematrix  $\text{Hess}(h \circ g)$  der Komposition von  $h$  und  $g$ .

**Aufgabe 2** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig partiell differenzierbar und sei  $x_0 \in U$ . Für  $v \in \mathbb{R}^n$  sei  $\gamma_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$  die Abbildung  $\gamma_v(t) := x_0 + tv$ . Zeigen Sie, dass dann

$$v^T \text{Hess}(f)(x_0)v = (f \circ \gamma_v)''(0)$$

für alle  $v \in \mathbb{R}^n$ .

**Aufgabe 3** Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y, z) := 3x^2 + 9y^2 + 24z^2 - x^3 - 2y^3 - 4z^3.$$

**Aufgabe 4** Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y) := x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$