BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften

Übungen zur Analysis II WS 2014/2015

Übungsblatt 8

Prof. Dr. Nikolay Shcherbina — Abgabe: 03.12.2014, 12 Uhr

Aufgabe 1 Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine (total) differenzierbare Funktion. Zeigen Sie:

1. Ist $n \geq 2$, so gibt es zu jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, so dass die Richtungsableitung $D_v f(x_0)$ verschwindet.
2. Ist $Df(x_0) = 0$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$, so ist die Funktion f konstant.

Aufgabe 2 Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y, z) := xyz$. Bestimmen Sie einen Punkt ζ aus der Strecke zwischen $a := (1, 1, 0)$ und $b := (0, 1, 1)$ mit $f(b) - f(a) = Df(\zeta)(b - a)$.

Aufgabe 3 Gegeben seien zwei Multiindizes $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ und $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Wir definieren die Relation $\beta \leq \alpha$ durch

$$\beta \leq \alpha \quad :\Leftrightarrow \quad \beta_i \leq \alpha_i \ \ \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Weiter definieren wir für zwei Multiindizes mit $\beta \leq \alpha$ den Multiindex $\alpha - \beta$ durch

$$\alpha - \beta := (\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_n - \beta_n).$$

Zeigen Sie, dass für jedes Polynom $P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha x^\alpha$$

und jeden Multiindex β die folgende Beziehung gilt:

$$D^\beta P(x) = \sum_{|\alpha| \leq k,\ \beta \leq \alpha} a_\alpha \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} x^{\alpha - \beta}$$

Aufgabe 4

1. Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades für die Funktion $f\colon \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \neq 1\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y,z) := \frac{e^x}{1-y}\cos z$$

an der Stelle $x_0 = (0,0,0)$.

2. Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritten Grades für die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := e^{x_1 x_2}$$

an der Stelle $x_0 = (1,0)$.

Pro Aufgabe gibt es 12 Punkte.