BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
**Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften**

# Übungen zur Analysis II WS 2014/2015

## Übungsblatt 7

Prof. Dr. Nikolay Shcherbina Abgabe: 26.11.2014, 12 Uhr

---

**Aufgabe 1** Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) + y^2\sin(\frac{1}{y}) & \text{für } x \neq 0 \text{ und } y \neq 0 \\ x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \text{ und } y = 0 \\ y^2\sin(\frac{1}{y}) & \text{für } x = 0 \text{ und } y \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \text{ und } y = 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass $f$ im Nullpunkt total differenzierbar, die partiellen Ableitungen dort aber nicht stetig sind.

**Aufgabe 2** Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und sei $v \in \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie $D_v f(0,0)$ und $Df(0,0)\cdot v$ in den folgenden beiden Situationen:

1. $f(x,y) = \arctan(x - y^2)$, $v = (3,4)$
2. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+2y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, $v = (2,1)$

**Aufgabe 3** Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & : \ xy \neq 0 \\ 0 & : \ xy = 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie, daß alle Richtungsableitungen von $f$ im Nullpunkt existieren, die Funktion $f$ dort aber nicht stetig ist.

**Aufgabe 4** Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $f$ genau dann (total) differenzierbar auf $\mathbb{R}^n$ ist, wenn $f$ linear ist.
*Hinweis: Berechnen Sie zunächst $D_i f(0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, und betrachten Sie anschließend für festes $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ den Grenzwert*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tx) - f(0) - Df(0)\cdot tx}{|tx|}.$$

---

Pro Aufgabe gibt es 12 Punkte.