BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften

Übungen zur Analysis II WS 2014/2015

Übungsblatt 6

Prof. Dr. Nikolay Shcherbina — Abgabe: 19.11.2014, 12 Uhr

Aufgabe 1 Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass f im Nullpunkt zweimal partiell differenzierbar ist, dass aber

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Aufgabe 2 Die Abbildungen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x+2y,\, 2x-y)^T \\ g(x,y) &= xy. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Differentiale (Jacobimatrizen) von f, g und $g \cdot f$ (hierbei bezeichnet $f \cdot g$ das Produkt von f und g, nicht die Komposition).

Aufgabe 3 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, sei $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)\colon D \to \mathbb{R}^m$, sei $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D und sei $a \in \mathbb{R}^m$. Dann definiert man

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad :\Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, x \in D \setminus \{x_0\} : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$.
2. Für jede Folge $(x_k) \subset D \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{k \to \infty} x_k = x_0$ gilt $\lim_{k \to \infty} f(x_k) = a$.
3. $\lim_{x \to x_0} f_i(x) = a_i$ für alle $i = 1, 2, \ldots, m$.

Aufgabe 4 Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass f im Nullpunkt stetig und partiell differenzierbar, aber nicht total differenzierbar ist.

Pro Aufgabe gibt es 12 Punkte.