BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften

Übungen zur Analysis II WS 2014/2015

Übungsblatt 5

Prof. Dr. Nikolay Shcherbina Abgabe: 12.11.2014, 12 Uhr

Aufgabe 1 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, sei (f_k) eine Folge beschränkter Funktionen $f_k \colon D \to \mathbb{R}$, und sei $f \colon D \to \mathbb{R}$ beschränkt. Zeigen Sie:

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_\infty = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (f_k) \text{ konvergiert auf } D \text{ gleichmäßig gegen } f.$$

Hierbei ist $\|g\|_\infty := \sup_{x\in D}|g(x)|$ für jede beschränkte Funktion $g \colon D \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und sei (g_k) eine Folge stetiger Funktionen $g_k \colon D \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_\infty < \infty \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{\infty} g_k \text{ konvergiert auf } D \text{ gleichmäßig} \\ \text{gegen eine stetige Funktion } g \colon D \to \mathbb{R}. \end{array}$$

Beweisen Sie dazu nacheinander die folgenden Aussagen:

(a) Für jedes $x \in D$ ist $(\sum_{k=1}^{N} g_k(x))_{N=1}^{\infty}$ absolut konvergent. Insbesondere existiert eine Funktion $g \colon D \to \mathbb{R}$ mit $g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k$.

(b) Für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt $\|\sum_{k=N+1}^{\infty} g_k\|_\infty \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \|g_k\|_\infty$.

(c) Es gilt $\lim_{N\to\infty} \|\sum_{k=1}^{N} g_k - g\|_\infty = 0$.

(d) Die Funktion g ist stetig.

Aufgabe 3 Seien $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x_1, x_2) := (e^{x_1+2x_2}, \sin(x_2 + 2x_1)) \quad \text{und} \quad g(y_1, y_2, y_3) := (y_1 + 2y_2^2 + 3y_3^2, 2y_2 - y_1^2).$$

Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung von f, g und $f \circ g$.

Bitte Wenden

Aufgabe 4 Für $n \geq 3$ und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ berechne man alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|^\alpha.$$

Berechnen Sie ferner $\Delta f(x) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$ und bestimmen Sie denjenigen Wert α (in Abhängigkeit von n), für den f der *Laplace-Gleichung*

$$\Delta f = 0$$

genügt. (Der Operator Δ heißt *Laplace-Operator*, die Lösungen der Laplace-Gleichung werden als *harmonische* Funktionen bezeichnet.)

Hinweis: Die Verwendung des Kronecker-Delta

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \textit{für} \quad i = j \\ 0 & \textit{für} \quad i \neq j \end{cases}$$

erleichtert die Notation.

Pro Aufgabe gibt es 12 Punkte.