

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften

Übungen zur Analysis II WS 2014/2015
Übungsblatt 4

Prof. Dr. Nikolay Shcherbina

Abgabe: 05.11.2014, 12 Uhr

Aufgabe 1 Untersuchen Sie die folgenden Funktionen und Abbildungen auf Stetigkeit.

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

2. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$g(t) := \begin{cases} (t + 2\pi, 0) & \text{für } t < -2\pi \\ (\sin t, 1 - \cos t) & \text{für } -2\pi \leq t < 0 \\ (\sin t, \cos t - 1) & \text{für } 0 \leq t < 2\pi \\ (t - 2\pi, 0) & \text{für } 2\pi \leq t \end{cases}$$

Aufgabe 2 Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

1. Zeigen Sie, dass die Funktionen $x \mapsto f(x, y)$ und $y \mapsto f(x, y)$ bei festgehaltenem $y \in \mathbb{R}$ bzw. $x \in \mathbb{R}$ stetig sind.
2. Zeigen Sie, dass f im Ursprung nicht stetig ist.

Aufgabe 3 Die folgenden Mengen sind alle nicht kompakt. Finden Sie zu jeder Menge eine offene Überdeckung, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt.

1. $A \subset \mathbb{R}^2$ mit $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| \leq 1\}$
2. $B \subset \mathbb{R}^3$ mit $B := \overline{B}(0, 1) \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$
3. $C \subset \mathbb{R}^4$ mit $C = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : 0 \leq x_i \leq 1 \text{ für alle } i = 1, 2, 3, 4\} \setminus \mathbb{Z}^4$

BITTE WENDEN

Aufgabe 4 Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen auf gleichmäßige und lokal gleichmäßige Konvergenz:

1. Die Folge $(f_n)_n$ mit $f_n: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f_n(x) := \left(\frac{1}{x^n}, \frac{x^2}{n} \right).$$

2. Die Folge $(g_n)_n$ mit $g_n: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g_n(x) := \frac{1}{n|x|}.$$