BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

**Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften**

# Übungen zur Analysis II WS 2014/2015

Übungsblatt 3

Prof. Dr. Nikolay Shcherbina — Abgabe: 29.10.2014, 12 Uhr

---

**Aufgabe 1** Untersuchen Sie die folgenden Punktfolgen auf Konvergenz und geben Sie im Falle der Konvergenz auch den Grenzwert an.

(a) $x_n \in \mathbb{R}^2$ mit $x_n = (\frac{1}{n}\cos n, \frac{1}{n}\sin n)$

(b) $x_n \in \mathbb{R}^3$ mit $x_n = (\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}, (-1)^n)$

(c) $x_n \in \mathbb{R}^3$ mit

$$x_n = \left( \frac{\log(n!)}{\sqrt{n^3}}, \frac{(-1)^{n!}[\log n]}{(-1)^{[\log n]}n!}, \frac{\log(n^2)}{\log(2n)} \right)$$

(d) $z_n \in \mathbb{R}^2$ mit $z_0 = (1,1)$ und $z_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1}) = ((x_n - y_n)/2, (x_n + y_n)/2)$.
*Hinweis: Berechnen Sie* $|z_n|$.

**Aufgabe 2** Wir betrachten Normen auf $\mathbb{R}^n$.

1. Sei $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass dann Konstanten $c, C > 0$ existieren, so dass

$$c\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq C\|x\|_\infty \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

   Beweisen Sie dazu nacheinander die folgenden Aussagen:

   (a) Es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass $\|x\| \leq C\|x\|_\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
   *Hinweis: Schreiben Sie* $x = \sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{e}_i$.

   (b) Die Abbildung $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist stetig.

   (c) Ist $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge und ist $R > 0$ eine Konstante mit $\|x_k\|_\infty \leq R$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so hat $(x_k)$ eine konvergente Teilfolge.

   (d) Es gibt eine Konstante $c > 0$, so dass $c\|x\|_\infty \leq \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

2. Sei $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für jede Folge $(x_n) \subset \mathbb{R}^n$ und jeden Punkt $a \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - a\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Bitte Wenden

**Aufgabe 3** Wir betrachten Normen auf dem Raum $C[0,1]$ der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$.

1. Zeigen Sie, dass die Menge $\{x^n \in C[0,1] : n \in \mathbb{N}\}$ linear unabhängig ist.

   *Hinweis: Leiten Sie die Gleichung $\sum_{n=1}^{N} a_n x^n = 0$ ab.*

2. Sei $\|\cdot\|_*\colon C[0,1] \to \mathbb{R}$ eine Norm und sei $\varphi\colon C[0,1] \to \mathbb{R}$ linear. Zeigen Sie, dass dann $\|\cdot\| := \|\cdot\|_* + |\varphi(\,\cdot\,)|$ eine Norm auf $C[0,1]$ ist.

3. Für $f \in C[0,1]$ seien $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$ und $\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|\,dx$ (siehe Aufgabe 1 auf Übungsblatt 2). Sei $\varphi\colon C[0,1] \to \mathbb{R}$ linear, so dass

$$\varphi(x^n) := \begin{cases} n & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases} .$$

   und sei $\|\cdot\|$ die Norm auf $C[0,1]$ definiert durch $\|f\| := \|f\|_1 + |\varphi(f)|$. Zeigen Sie:

   (a) Für die Folge $(f_n) \subset C[0,1]$ mit $f_n(x) := x^n/n$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - 0\|_\infty = 0, \text{ aber nicht } \lim_{n\to\infty} \|f_n - 0\| = 0.$$

   (b) Für die Folge $(f_n) \subset C[0,1]$ mit $f_n(x) := x^{2n}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - 0\| = 0, \text{ aber nicht } \lim_{n\to\infty} \|f_n - 0\|_\infty = 0.$$

**Aufgabe 4** Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, sei $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung und sei $a \in U$. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

   (i) $f$ ist stetig in $a$.

   (ii) Für jede Folge $(x_n) \subset U$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

2. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} (2xy, x^2 - y^2) & \text{für } x \le y, \\ (x^2 + y^2, 0) & \text{für } x > y. \end{cases}$$

   stetig ist.

Pro Aufgabe gibt es 12 Punkte.