BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften

Übungen zur Analysis II WS 2014/2015

Übungsblatt 2

Prof. Dr. Nikolay Shcherbina — Abgabe: 22.10.2014, 12 Uhr

Aufgabe 1 Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Gegeben sei der Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\|\cdot\|_\infty\colon V \to \mathbb{R}$ mit $\|(x_1,\dots,x_n)\|_\infty = \max\{|x_1|,\dots,|x_n|\}$ eine Norm ist.

2. Gegeben sei der Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\|\cdot\|_1\colon V \to \mathbb{R}$ mit $\|(x_1,\dots,x_n)\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$ eine Norm ist.

3. Gegeben sei der Vektorraum $V = C([a,b])$, der auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ stetigen Funktionen. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\|\cdot\|_\infty\colon V \to \mathbb{R}$ mit $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$ eine Norm ist.

4. Gegeben sei der Vektorraum $V = C([a,b])$, der auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ stetigen Funktionen. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\|\cdot\|_1\colon V \to \mathbb{R}$ mit $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx$ eine Norm ist.

Aufgabe 2

1. Beweisen Sie die folgenden Aussagen über Normen auf $\mathbb{R}$:

   (a) Sei $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linear, $\varphi \not\equiv 0$. Dann ist $\|x\| := |\varphi(x)|$ eine Norm auf $\mathbb{R}$.

   (b) Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}$. Dann gibt es eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi \not\equiv 0$, so dass $\|x\| = |\varphi(x)|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

2. Beweisen Sie die folgenden Aussagen über Normen auf $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$:

   (a) Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linear, $\varphi \not\equiv 0$. Dann ist $\|x\| := |\varphi(x)|$ keine Norm auf $\mathbb{R}^n$.

   (b) Seien $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linear, so dass $\bigcap_{i=1}^N \operatorname{Kern}(\varphi_i) = \{0\}$. Dann ist $\|x\| := \max_{1\leq i\leq N}|\varphi_i(x)|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.

   (c) Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie mit Hilfe des unten folgenden Faktes, dass dann $\|x\| = \sup_{\|y\|=1}|\varphi_y(x)|$ für geeingete lineare Abbildungen $\varphi_y\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

      FAKT. *Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es für jeden Vektor $y \in \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so dass $\varphi_y(y) = \|y\|$ und $|\varphi_y(x)| \leq \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ (siehe z.B. R. Meise und D. Vogt, Einführung in die Funktionalanalysis, Korollar 6.5).*

Aufgabe 3 Untersuchen Sie die folgenden Mengen auf Offenheit und Abgeschlossenheit. Bestimmen Sie jeweils auch die abgeschlossene Hülle, den offenen Kern und den Rand.

1. $A := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$.
2. $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$.
3. $C := \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |(x, y) - (\frac{1}{2^n}, 0)| < \frac{1}{2^{n+2}}\}$.

Aufgabe 4 Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

1. Aus $A \subset B$ folgen $A^\circ \subset B^\circ$ und $\overline{A} \subset \overline{B}$, aber nicht $\partial A \subset \partial B$.
2. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ und $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$.

Pro Aufgabe gibt es 12 Punkte.