BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften

Übungen zur Analysis II WS 2014/2015

Übungsblatt 1

Prof. Dr. Nikolay Shcherbina — Abgabe: 15.10.2014, 12 Uhr

Aufgabe 1 Beweisen Sie, dass die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{m} : x \in \mathbb{Q},\ x = \frac{n}{m} \text{ mit } n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N}, \mathrm{ggT}(n,m) = 1 \\ 0 : x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Riemann-integrierbar ist.

Aufgabe 2 Bestimmen Sie die Unter- und Obersummen von $f(x) = x^2$ zu äquidistanten Zerlegungen des Intervalls $[0,a]$, $0 < a$. Berechnen Sie so das Integral $\int_0^a x^2 dx$.
Hinweis: Verwenden Sie die Formel $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Aufgabe 3 Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Riemann-Integrale auf Konvergenz:

1. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{x^2} dx$
3. $\int_0^1 \frac{\log x}{1-x} dx$

Aufgabe 4 Sei $f\colon \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ die Funktion $f(x) := \arctan(x)$.

1. Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass
$$f^{(n)}(x) = (n-1)! \sin\left(n(y + \frac{\pi}{2})\right) \cos^n y, \quad y := f(x).$$
2. Bestimmen Sie die Taylor-Reihe von f um $x_0 = 0$ und zeigen Sie, dass diese für $|x| \leq 1$ gegen f konvergiert.

   Hinweis: Verwenden Sie die Restglieddarstellung von Lagrange.

Die Abgabe erfolgt jeweils ***Mittwoch bis 12 Uhr*** *in die Postfächer der zuständigen Übungsleiter. Eine Übersicht über die Postfächer finden Sie auf der Homepage zur Vorlesung,* `http://www.kana.uni-wuppertal.de/lehre/ws-201415/analysis-2.html`.

Pro Aufgabe gibt es 12 Punkte.