BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Fachbereich C Mathematik und Naturwissenschaften

Analysis II WS 2008/2009

Nachklausur

Prof. Dr. Hartmut Pecher *6. April 2009*

Aufgabe 1 (4 Punkte) a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = x \sin y + y \cos x \,.$$

Berechnen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $(0, \frac{\pi}{2})$ in Richtung $\xi = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$.
b) Gesucht ist eine Funktion $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\nabla\phi(x,y) = (x^3 - y^3, -3y^2x) \,.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \frac{y}{1 + x^2 + y^2} \,.$$

Bestimmen Sie alle lokalen Minima und Maxima von f .

Aufgabe 3 (4 Punkte) Seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = x^4y^4 \,,$$
$$g(x,y) = x^4 + 4y^4 - 1 \,.$$

Bestimmen Sie den maximalen Wert von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$.

Aufgabe 4 (3 Punkte) Für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,,\ (x,y) \mapsto (y^2+1)(e^x, e^y)$$

berechne man die Jacobi-Matrix und deren Determinante. In welchen Punkten ist f lokal umkehrbar ?

Aufgabe 5 (3 Punkte) Berechnen Sie:

$$\int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 e^{-|x|^4} \, dx \,.$$

Aufgabe 6 (3 Punkte) Für $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $y \in \mathbb{R}$ sei

$$(Tf)(y) := \int_{\mathbb{R}} x^2y^2e^{-x^2y^2} f(x) \, dx \,.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Konvergenzsatzes von Lebesgue: Tf ist stetig in jedem Punkt $y \in \mathbb{R}$. Ist Tf beschränkt ?