Übungsblatt 13

Mathematik für Ingenieure (Maschinenbauer und Sicherheitstechniker), 1. Semester, bei Prof. Dr. G. Herbort im WiSe13/14 – Dipl.-Math. T. Pawlaschyk, 28.01.14

Themen: Potenz-, Logarithmen- und Hyperbelfunktionen, Differentiation

Aufgabe 1

Lösen Sie folgende Gleichungen.

$$\text{(i) } 9^x \cdot 3^{x^2+1} = (27^x)^x \qquad \text{(ii) } 25^x + 2 \cdot 5^x = 24 \qquad \text{(iii) } \cos(2x) = \cos(x)$$

$$\text{(iv) } 3^{3x-1} - 5^{x-2} = 3^{3x-3} - 5^{x-3} \qquad \text{(v) } \ln x - \ln 4 = \ln 35 - \ln(x+4)$$

Lösungen zu Aufgabe 1

Zu (i): Es ist

$$\begin{aligned} 9^x \cdot 3^{x^2+1} = (27^x)^x \quad &\Leftrightarrow \quad 3^{2x} \cdot 3^{x^2+1} = 27^{x^2} \\ &\Leftrightarrow \quad 3^{2x+x^2+1} = 3^{3x^2} \\ &\Leftrightarrow \quad 3^{2x+x^2+1-3x^2} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 3^{2x-2x^2+1} = 3^0 \end{aligned}$$

Wir wenden auf beiden Seiten den Logarithmus zur Basis 3 an, also $\log_3$, und erhalten die Gleichung

$$-2x^2 + 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$$

Mit der pq-Formel erhalten wir die Lösungen $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Zu (ii): Es gilt $25^x = (5^2)^x = 5^{2x}$ und somit:

$$25^x + 2 \cdot 5^x = 24 \quad \Leftrightarrow \quad (5^x)^2 + 2 \cdot 5^x = 24$$

Wir substituieren $t = 5^x$ und erhalten die Gleichung $t^2 + 2t - 24 = 0$. Die Lösungen sind

$$t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+24} = -1 \pm 5.$$

Da $t = 5^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, kommt nur die Lösung $t = 4$ in Frage. Also

$$\begin{aligned} 4 = 5^x = t \quad &\Leftrightarrow \quad \ln 4 = x \ln 5 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\ln 4}{\ln 5} = \log_5 4 = x \log_5(5) = x \cdot 1 = x \approx 0.861353 \end{aligned}$$

Zu (iii): Es gilt $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$, also ist die Gleichung mit

$$2\cos^2 x - 1 = \cos x$$

äquivalent. Schreiben wir $y = \cos x$, so folgt

$$y^2 - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}$$

Diese quadratische Gleichung in y hat die Lösungen $y = 1$ und $y = -1/2$. Es sind also nur noch die Gleichungen $\cos x = 1$ und $\cos x = -1/2$ zu lösen. Die Lösungen der ersten Gleichung haben alle die Form $x = 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Die zweite Gleichung wird genau durch die x der Form $\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ oder $\frac{4}{3}\pi + 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Zu (iv): Es ist:

$$\begin{aligned}
3^{3x-1} - 5^{x-2} = 3^{3x-3} - 5^{x-3} \quad &\Leftrightarrow \quad 3^{3x-1} - 3^{3x-3} = 5^{x-2} - 5^{x-3} \\
&\Leftrightarrow \quad 3^{3x}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{27}\right) = 5^x\left(\frac{1}{25} - \frac{1}{125}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad 3^{3x}\left(\frac{8}{27}\right) = 5^x\left(\frac{4}{125}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{27}{5}\right)^x = \left(\frac{4}{125}\right) \cdot \left(\frac{27}{8}\right) = \frac{27}{250} \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln\left(\frac{27}{250}\right)}{\ln\left(\frac{27}{5}\right)} \approx -1.31975
\end{aligned}$$

Zu (v): Nach Anwendung der Exponentialfunktion auf beiden Seiten der Gleichung erhalten wir:

$$\frac{x}{4} = \frac{35}{x+4} \Leftrightarrow x(x+4) = 140$$

Diese Gleichung wird durch $x = 10$ und $x = -14$ gelöst. Aber höchstens $x = 10$ kann Lösung der logarithmischen Gleichung sein, da für $x = -14$ der Ausdruck $\ln(x+4)$ nicht definiert ist. Die Probe bei $x = 10$ ergibt, dass beide Seiten der gegebenen Gleichung gleich $\ln(5/2) \approx 0.916291$ sind.

Aufgabe 2

Mit der Exponentialfunktion e^x bildet man die sog. *Hyperbelfunktionen*

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

sowie $\mathrm{tgh}(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$.

Zeigen Sie:

(a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, und tgh hat Werte in $(-1, 1)$.

(b) $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wächst monoton und $\mathrm{Arsinh}(t) = \ln(t + \sqrt{1+t^2})$ definiert eine Umkehrfunktion zu sinh.

(c) Auch tgh hat eine Umkehrfunktion (Artgh). Diese ist auf $(-1, 1)$ erklärt. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Artgh}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

(d) Bestimmen Sie jeweils die Ableitung von sinh, cosh, tgh und Artgh.

Aufgabe 3

a) Berechnen Sie jeweils die Ableitung folgender Funktionen.

$$\text{(i)}\ \frac{x^2-1}{(x^2+2)^2} \qquad \text{(ii)}\ e^{-2x}\sin(2\sqrt{3}x - 2) \qquad \text{(iii)}\ \cos^2(4x) \qquad \text{(iv)}\ \frac{x-1}{3-x}e^{-3x}$$

b) Wo haben diese Funktion lokale Extrema?