Lösungen zu Übungsblatt 12

Mathematik für Ingenieure (Maschinenbauer und Sicherheitstechniker), 1. Semester, bei Prof. Dr. G. Herbort im WiSe13/14 – Dipl.-Math. T. Pawlaschyk, 21.01.14

Themen: Horner-Schema, Polynomdivision, trigonometrische Funktionen

Aufgabe 1

(a) Sei $f(x) = x^4 + x^3 - 20x^2 + 72$. Zeigen Sie, dass $x_0 = 3$ und $x_1 = -2$ Nullstellen von f sind. Finden Sie ein Polynom g vom Grad 2, so dass $f(x) = (x-3)(x+2)g(x)$ gilt. Was sind die Nullstellen von g?

(b) Sei $f(x) = x^6 - 4x^5 - 6x^4 - 68x^3 - 223x^2 - 240x - 84$. Zeigen Sie, dass $x_0 = -1$ und $x_1 = 7$ Nullstellen von f sind und bestimmen Sie jeweils ihre Vielfachheit.

(c) Sei $f(x) = x^3 + 14x^2 + 37x + 59$. Bestimmen Sie Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, so dass f die folgende Form hat:

$$f(x) = a(x+2)^3 + b(x+2)^2 + c(x+2) + d$$

Hinweis: Benutzen Sie das Horner-Schema.

Lösungen zu Aufgabe 1

Zu (a): Dass $x_0 = 3$ und $x_1 = -2$ Nullstellen von f sind, prüft man leicht durch Einsetzen. Mit Hilfe des Horner-Schemas erhalten wir:

	1	1	-20	0	72
$\cdot 3$		3	12	-24	-72
$+$	1	4	-8	-24	0
$\cdot(-2)$		-2	-4	24	
$+$	1	2	-12	0	

D.h. $f(x) = (x-3)(x+2)(x^2+2x-12)$. Mit der pq-Formel erhalten wir folgende Nullstellen für $g(x) = x^2 + 2x - 12$.

$$x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{13}.$$

Zu (b):
Wir setzen $x_0 = -1$ und $x_1 = 7$ in f ein und sehen leicht, dass es sich um Nullstellen handelt. Wir verwenden das Hornerschema:

	1	-4	-6	-68	-223	-240	-84
$\cdot(-1)$		-1	5	1	67	156	84
$+$	1	-5	-1	-67	-156	-84	0
$\cdot 7$		7	14	91	168	84	
$+$	1	2	13	24	12	0	

Wir führen das Schema fort und prüfen, ob 7 eine Nullstelle von höherer Vielfachheit als 1 ist.

	1	2	13	24	12
$\cdot 7$		7	63	432	3192
$+$	1	9	76	456	**3204**

Da $3204 \neq 0$, hat f in 7 nur eine Nullstelle von Vielfachheit 1. Wir greifen das vorletzte Schema auf und untersuchen die Nullstelle -1.

	1	2	13	24	12
$\cdot(-1)$		-1	-1	-12	-12
$+$	1	1	12	12	0
$\cdot(-1)$		-1	0	-12	
$+$	1	0	12	0	
$\cdot(-1)$		-1	1		
$+$	1	-1	**13**		

Da $13 \neq 0$, ist die Vielfachheit der Nullstelle -1 also 3. f hat dann die Gestalt $f(x) = (x+1)^3(x-7)(x^2+12)$.

Zu (c):

Wir verwenden das Horner-Schema für die Stelle $x_0 = -2$:

	1	14	37	59
$\cdot(-2)$		-2	-24	-26
$+$	1	12	13	**33**
$\cdot(-2)$		-2	-20	
$+$	1	10	$-$**7**	
$\cdot(-2)$		-2		
$+$	1	**8**		

Somit ist $f(x) = (x+2)^3 + 8(x+2)^2 - 7(x+2) + 33$.

Aufgabe 2 Untersuchen Sie das asymptotische Verhalten folgender rationaler Funktionen für $|x| \to \infty$.

$$\text{(a)} \quad f(x) = \frac{x^5 - 7x^2 + 13x - 2}{x^2 + 7} \qquad \text{(b)} \quad g(x) = \frac{2x^5 - x^3 + 7x - 2}{x^2 - 2x}$$

Skizzieren Sie den Graphen von g.

Hinweis: Benutzen Sie Polynomdivision.

Lösungen zu Aufgabe 2

Zu (a):
Mit Polynomdivision erhalten wir folgenden Ausdruck für f:

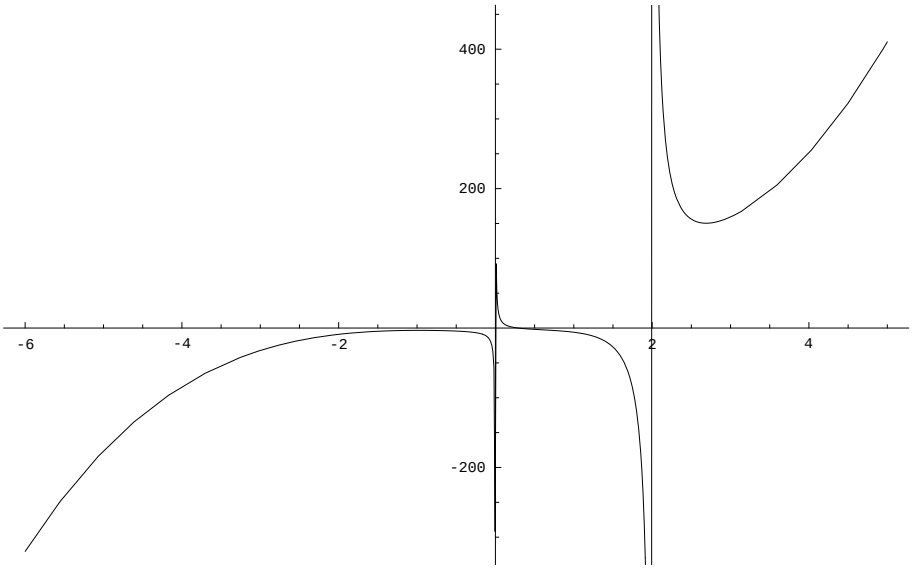
$$\begin{array}{l}
(x^5 - 7x^2 + 13x - 2) : (x^2 + 7) = x^3 - 7x - 7 + \frac{62x+51}{x^2+7} \\
\underline{-(x^5 + 7x^3)} \\
\quad -7x^3 - 7x^2 + 13x - 2 \\
\quad \underline{-(-7x^3 - 49x)} \\
\qquad -7x^2 + 62x - 2 \\
\qquad \underline{-(-7x^2 - 49)} \\
\qquad\quad 62x + 51
\end{array}$$

Für $|x| \to \infty$ verhält sich demnach g wie das Polynom $x^3 - 7x - 7$.

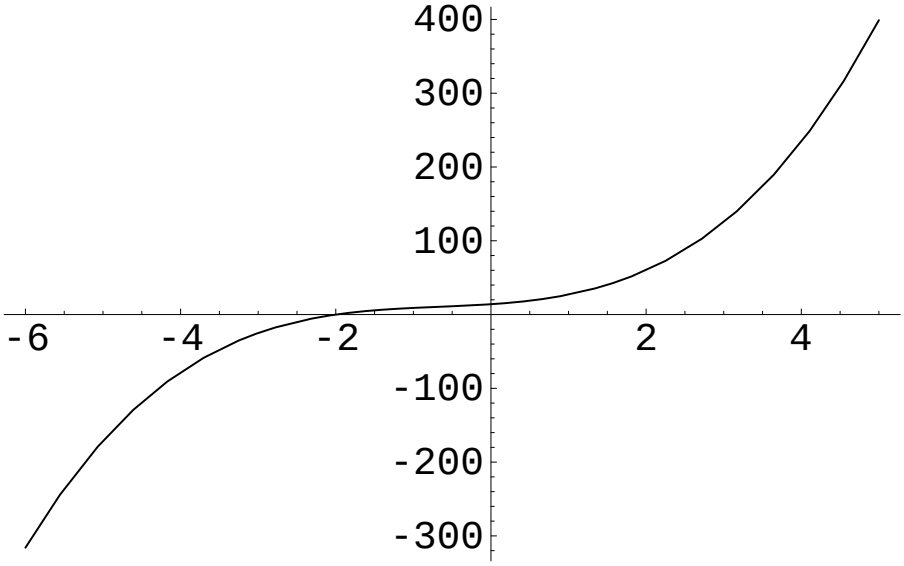
Zu (b):
Polynomdivision liefert:

$$\begin{array}{l}
(2x^5 - x^3 + 7x - 2) : (x^2 - 2x) = 2x^3 + 4x^2 + 7x + 14 + \frac{21x-2}{x^2-2x} \\
\underline{-(2x^5 - 4x^4)} \\
\quad 4x^4 - x^3 + 7x - 2 \\
\quad \underline{-(4x^4 - 8x^3)} \\
\qquad 7x^3 + 7x - 2 \\
\qquad \underline{-(7x^3 - 14x^2)} \\
\qquad\quad 14x^2 + 7x - 2 \\
\qquad\quad \underline{-(14x^2 - 14x)} \\
\qquad\qquad 21x - 2
\end{array}$$

Somit verhält sich g wie $2x^3 + 4x^2 + 7x + 14$ für $|x| \to \infty$. Der Graph von g sieht wie folgt aus:



Zum Vergleich hier der Graph von $2x^3 + 4x^2 + 7x + 14$:



Aufgabe 3

(a) Benutzen Sie das Additionstheorem für sin, sowie die Formel für $\cos(2x)$ und $\sin(2x)$ um herzuleiten, dass

$$\sin(5x) = \sin x \cdot (4\cos^2(2x) + 2\cos(2x) - 1)$$

gilt. Berechnen Sie damit $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

(b) Vervollständigen Sie die folgende Tabelle.

α	$15°$	$30°$	$45°$			$90°$		$180°$		$270°$	$330°$		$420°$
x		$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$						2π	
$\sin(x)$							$\frac{1}{2}\sqrt{3}$						
$\cos(x)$									$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$				
$\mathrm{tg}(x)$						$\times$		$\times$		$\times$		$\times$	

(c) Bestimmen Sie die Periode und die Nullstellen der nachstehenden Funktionen.

$$\text{(i)}\ \cos(3x - \pi/3) \qquad \text{(ii)}\ \sin(\pi/8 - 3x/4) \qquad \text{(iii)}\ -2\cos^2(3x + \pi/5)$$

Lösungen zu Aufgabe 3

(a): Es gilt

$$\begin{aligned}
\sin(5x) &= \sin x\cos(4x) + \cos x\sin(4x) \\
&= \sin x\cos(4x) + 2\cos x\sin(2x)\cos(2x) \\
&= \sin x\cos(4x) + 4\cos^2 x\sin x\cos(2x) \\
&= \sin x\Big(2\cos^2(2x) - 1 + 4\cos^2 x\cos(2x)\Big) \\
&= \sin x\Big(2\cos^2(2x) - 1 + 2(\cos(2x) + 1)\cos(2x)\Big) \\
&= \sin x\Big(4\cos^2(2x) + 2\cos(2x) - 1\Big) \\
&= 4\sin x\Big(\cos^2(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{4}\Big)
\end{aligned}$$

Jetzt sei $x = \pi/5$ und $s = \cos(2\pi/5)$. Dann löst s die Gleichung

$$s^2 + \frac{1}{2}s = \frac{1}{4}\,,$$

also ist

$$\cos(2\pi/5) = s = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

(b)

α	$15°$	$30°$	$45°$	$60°$	$72°$	$90°$	$120°$	$180°$	$225°$	$270°$	$330°$	$360°$	$420°$
x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{7\pi}{3}$
$\sin(x)$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos(x)$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}(x)$	$2-\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\times$	$-\sqrt{3}$	$\times$	1	$\times$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\times$	$\sqrt{3}$

Z.B.: Um $\sin(45°)$ und $\cos(45°)$ auszurechnen, benutzen wir den Satz von Pythagoras. Diese Zahlen sind genau die Seitenlänge d eines Quadrats mit Diagonallänge 1. Also gleich $1/\sqrt{2}$.

(c)(i) Der Kosinus verschwindet genau für Punkte $y = \pi/2 + \pi k$, wobei $k \in \mathbb{Z}$. Für welche x gilt also

$$3x - \pi/3 = \pi/2 + \pi k\ ?$$

Auflösen nach x liefert die Nullstellen $x = \frac{\pi}{3}(5/6 + k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Wir wissen, dass der Kosinus 2π-periodisch ist. Wir setzen $x = y + 2\pi/3$ ein und erhalten

$$\cos(3x - \pi/3) = \cos(3(x + 2\pi/3) - \pi/3) = \cos(3y - \pi/3 + 2\pi) = \cos(3y - \pi/3).$$

Also ist die Periode $2\pi/3$.

(ii) Der Sinus verschwindet an den Stellen $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Ähnlich wie in (i) setzen wir gleich und lösen nach x auf

$$\pi/8 - 3x/4 = \pi k \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{4\pi}{3}(1/8 - k)$$

Die Periode ist $8\pi/3$. Denn für $x = y + 8\pi/3$ eingesetzt erhält man

$$\sin(\pi/8 - 3x/4) = \sin(\pi/8 - 3(y + 8\pi/3)/4) = \sin(\pi/8 - 3y/4 + 2\pi) = \sin(\pi/8 - 3y/4).$$

(iii) Der Kosinus verschwindet genau dann, wenn sein Quadrat verschwindet. Also gehen wir wie in (i)(a) vor, setzen gleich und lösen nach x auf:

$$3x + \pi/5 = \pi/2 + \pi k \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{3}(3/10 + k).$$

Wir haben für die Periode des Quadrats des Kosinus:

$$\cos^2(y + \pi) = (\pm\cos(y))^2 = \cos(y).$$

Die Periode ist also $\pi/3$, wie man leicht nachrechnet.