Lösungen zu Übungsblatt 11

Mathematik für Ingenieure (Maschinenbauer und Sicherheitstechniker), 1. Semester, bei Prof. Dr. G. Herbort im WiSe13/14 – Dipl.-Math. T. Pawlaschyk, 14.01.14

Themen: Stetigkeit

Aufgabe 1 Wie muss $a \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die folgenden Funktionen stetig auf ganz $\mathbb{R}$ werden?

$$\text{(a) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \geq 3 \\ -\frac{1}{x} + a, & x < 3 \end{cases} \qquad \text{(b) } g(x) = \begin{cases} 2ax - x^3, & x > -3 \\ -4x^2 + 21x, & x \leq -3 \end{cases}$$

Lösungen zu Aufgabe 1

(a) Es reicht, beide Teilfunktionen $x^2 - 4$ und $-\frac{1}{x} + a$ an der Stelle $x = 3$ zu vergleichen, da beide dort stetig sind. Wir setzen also $x = 4$ ein und erhalten die Gleichung

$$3^2 - 4 = -\frac{1}{3} + a \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{16}{3}.$$

Für $a = \frac{16}{3}$ hat f nun keinen Sprung an der Stelle $x = 3$ und ist dort stetig.

(b) Wie in (a) vergleichen wir beide Teilfunktionen und erhalten die Gleichung

$$2a(-3) - (-3)^3 = -4(-3)^2 + 21(-3) \quad \Leftrightarrow \quad -6a + 27 = -36 - 63 \quad \Leftrightarrow \quad a = 21$$

Aufgabe 2 Überprüfen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit.

$$\text{(a) } f(x) = x + \frac{x+1}{|x+1|} \qquad \text{(b) } g(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ x^3, & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Lösungen zu Aufgabe 2

(a) Für $x > -1$ ist der Betrag $|x + 1|$ immer positiv, also $|x + 1| = x + 1$ und daher $f(x) = x + 1$ eine stetige Funktion auf $(-\infty, -1)$.
Für $x < -1$ gilt $|x + 1| = -(x + 1)$. Somit ist $f(x) = x - 1$ und stetig auf $(-1, +\infty)$.
An der Stelle $x = -1$ ergibt sich aber folgende Situation

$$\lim_{x \uparrow -1} f(x) = \lim_{x \uparrow -1} x - 1 = -2 \neq 0 = \lim_{x \uparrow -1} x + 1 = \lim_{x \downarrow -1} f(x).$$

Somit kann f in $x = -1$ nicht stetig sein.

(b) Wir haben $g(x) = x^2$ für alle $x \in (m, m + 1)$, $m \in \mathbb{Z}$. Dort ist g offensichtlich stetig. Wir prüfen auf Stetigkeit für $x = k \in \mathbb{Z}$. Sei $x_n := 1/n + k$. Dann fällt $(x_n)_n$ streng monoton gegen k und $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$; die Folgenglieder x_n sind niemals ganze Zahlen. Soll g in $x = k$ stetig sein, muss gelten

$$k^3 = g(k) = \lim_{n \to +\infty} g(x_n) = \lim_{n \to +\infty} x_n^2 = \lim_{n \to +\infty} (1/n + k)^2 = k^2.$$

Dies ist aber genau dann möglich, wenn $k = 0$ oder $k = 1$ ist. D.h. g ist sogar stetig auf dem Intervall $(-1, 2)$, den oben erwähnten restlichen kleineren Intervallen $(m, m+1)$, $m \in \mathbb{Z}$, sonst aber in $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0, 1\}$ unstetig.

Aufgabe 3

Überprüfen Sie jeweils, ob und wie die Funktion f in $x_0 = -1$ stetig fortsetzbar ist.

$$\text{(i) } f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 + 3x + 2} \qquad \text{(ii) } f(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} \qquad \text{(iii) } f(x) = \frac{4x}{x^2 + 2x + 1}$$

Lösungen zu Aufgabe 3

Zu (a), Teil (i):
Man berechne mit den Verfahren der Vorlesung (Nullstellenberechnung, Horner-Schema oder Polynomdivision), dass gilt:

$$f(x) = \frac{(x+1)(x^2 - 2x + 1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 2}$$

Somit ist die Funktion f in -1 stetig fortsetzbar durch $f(-1) = 4$.

Teil (ii):

$$f(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}{(x+1)(x^2 + x - 6)} = \frac{(x-1)(x^2 - 4)}{x^2 + x - 6}.$$

Die Funktion f ist also in -1 stetig fortsetzbar durch $f(-1) = -1$.

Teil (iii): Die Funktion f ist in -1 nicht stetig fortsetzbar, da $\lim_{x\to -1} |f(x)| = \infty$ ist.

Aufgabe 4

Für die Funktion $f(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{2}$ bestimmen Sie mit dem Bisektionsverfahren die Nullstellen von f bis auf 2 Nachkommastellen und vergleichen Sie diese mit den Nullstellen von f. Starten Sie hierfür im Intervall $[0, 3]$.

Lösungen zu Aufgabe 4

Die Nullstellen von f sind

$$x_0 = \frac{3 + \sqrt{7}}{2} \approx 2,822875656 \quad \text{und} \quad x_0 = \frac{3 - \sqrt{7}}{2} \approx 0,177124344.$$

Zwar ist $f(0) = f(3) = 0.5 > 0$, jedoch ist $f(1,5) = -1.75 < 0$. Wir wählen als erstes Intervall $[1.5, 3]$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es dort eine Nullstelle.
Der Mittelpunkt von $[1.5, 3]$ ist $2,25$, und $f(2.25) = -1,1875 < 0$ und $f(3) = 0.5 > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es in $[2.25, 3]$ eine Nullstelle.
Der Mittelpunkt von $[2.25, 3]$ ist 2.265, und $f(2.265) = -0.4843750 < 0$ und $f(3) = 0.5 > 0$.
Der Mittelpunkt von $[2.265, 3]$ ist 2.28125, und $f(2.28125) = -0.0273438 < 0$ und $f(3) = 0.5 > 0$.
Der Mittelpunkt von $[2.28125, 3]$ ist 2.90625, und $f(2.90625) = 0.2275391 > 0$, aber $f(3) = 0.5 > 0$. Wir verkleinern nun von der anderen Seite.
Der Mittelpunkt von $[2.28125, 2.90625]$ ist 2.8359375, und $f(2.28125) < 0$ und $f(2.8359375) = 0.0347290 > 0$.
Der Mittelpunkt von $[2.28125, 2.90625]$ ist 2.82421875 und damit auf zwei Nachkommastellen genau x_0.
Da die Intervallhalbierung in unserem Fall nur rationale Werte erzeugt, die Nullstellen aber irrational sind, wird man erst nach Unendlich vielen Schritten die Nullstelle treffen.

Zum Bisektionverfahren auf dem Intervall $[0, 1.5]$ wenden wir die gleiche Methode an und geben im Folgenden nur die Intervalle und Ergebnisse an, die relevant sind.

$f(0) = 0.5$

$f(1.5) = -1.75$

$f(0.75) = -1,1875000$

$f(0.375) = -0,4843750$

$f(0.1875) = -0,0273438$

$f(0.09375) = 0,2275391$

$f(0.140625) = 0,0979004$

$f(0.1640625) = 0,0347290$

$f(0.17578125) = 0,0035553$

$f(0.181640625) = -0,0119286$

$f(0.1787109385) = -0,0041952$